

Numerisk løsning af en integralligning fra en antennemodel

Odense, Danmark
Syddansk Universitet - Odense Universitet
Institut for Matematik og Datalogi
Bachelor projekt - forår 2004
Forfatter : Brian Horn, horn@mip.sdu.dk
Vejleder : Edmund Christiansen
Dato : 29.09.2004

29. september 2004

Synopsis

Dette bachelorprojekt har til formål at bestemme en numerisk løsning af en *Fredholm integralligning af 1. art*, som opstår i forbindelse med en matematisk model for den inducerede strøm, som opstår i en dipol antenne, når denne er placeret i et elektrisk felt. Der fokuseres på to integralligninger henholdsvis *Hallén's* integralligning og *Pocklington's* integralligning. Forskellige løsningsmetoder implementeres og analyseres, for derefter at blive sammenlignet med allerede eksisterende resultater fra litteraturen. Specielt har en produkt integrationsmetode interesse, idet der ikke umiddelbart findes dokumentation for at den tidligere har været anvendt på problemet.

Det vises, at valget af beregningsmodel er afgørende for om der findes velstillede numeriske løsninger til integralligningen.

Forord

Denne rapport er resultatet af et Bachelor projekt skrevet under Lektor, Ph.D., Dr. Scient Edmund Christiansen fra Institut for Matematik og Datalogi ved Syddansk Universitet i Odense. Projektet er udført over en periode på 6 måneder og udgør 9 ECTS points på Civilingeniøruddannelsen i datateknologi ved Mærsk Mc-Kinney Møller Institutet for Produktionsteknologi. Jeg vil gerne benytte lejligheden til at takke Edmund Christiansen for råd og vejledning ved de møder, som har fundet sted undervejs i projektførløbet.

Odense, september 2004.

Brian Horn

Symbolliste

ϵ	Elektrisk permittivitet af stof, ϵ_0 i vakuum [F/m].
η	Karakteristisk impedans af stof, η_0 i vakuum [Ω].
μ	Elektrisk permeabilitet af stof, μ_0 i vakuum [H/m].
λ	Bølgelængde [m].
ω	Frekvens [rad/s].
k	Fasekonstant givet ved $2\pi/\lambda$ [$1/m$].
c	Lysets hastighed, c_0 i vakuum [m/s].
V	Elektrisk spænding [V].
I	Elektrisk strømstyrke [A].
Q	Elektrisk ladning [C].
\mathbf{E}	Elektrisk feltstyrke [V/m].
\mathbf{D}	Elektrisk fluxtæthed [C/m^2].
\mathbf{H}	Magnetisk feltstyrke [A/m].
\mathbf{B}	Magnetisk fluxtæthed [T].
\mathbf{J}	Strømtæthed [A/m^2].
i, j	Den imaginære enhed $i = j = \sqrt{-1}$.
$K(x, y)$	Generel integrationskerne med afhængige variable x og y .
$G(z, z')$	Generel integrationskerne med afhængige variable z og z' .
$C^k(]a, b[)$	Mængden af k gange kontinuert differentiable funktioner på det åbne interval $]a, b[$.
$C^k([a, b])$	Mængden af k gange kontinuert differentiable funktioner på det lukkede interval $[a, b]$.
\mathbf{n}	Normalvektor.
\mathbf{a}_z	Enhedsvektor med orientering i retning af z .
\mathbf{a}_ρ	Enhedsvektor med orientering i retning af ρ .
\mathbf{a}_ϕ	Enhedsvektor med orientering i retning af ϕ .
$\mathbf{A}(x, y, z)$	Vektorpotentiale i koordinaterne (x, y, z) .
∇	$\mathbf{grad}f(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$.
$a \approx b$	'Næsten lighedstegn': $\frac{ a-b }{ a } \ll 1$.
u_i, v_i	Singulære funktioner for integralkerne.
μ_i	Singulære værdier for integralkerne.
σ_i	Singulære værdier for koefficientmatricen i det diskrete problem.
$O()$	Asymptotisk $O()$ -notation.

Indhold

Synopsis	i
Forord	ii
Symbolliste	iii
1 Introduktion	1
1.1 Historisk perspektiv	1
1.2 Problemstilling	2
1.3 Antenne design	2
1.4 Rapportens organisering	3
2 Matematisk modellering	4
2.1 Antenne model	4
2.2 Lineær cylindrisk dipol antenne	5
2.2.1 Delta-gap modellen	5
2.2.2 Magnetic frill generator modellen	7
2.3 <i>Pocklington's</i> integralligning	8
2.4 <i>Hallén's</i> integralligning	11
2.5 Sinus approksimation af strømmen	13
2.6 Asymptotisk opførsel af <i>Hallén's</i> integralligning	14
2.7 Delkonklusion	15
3 Integralligninger	17
3.1 Fredholm integralligninger af 1. art	17
3.2 Fredholm integralligninger af 2. art	19
3.3 Betingelser for løsning af Fredholm integralligninger af 1. art	19
3.3.1 Singulær værdi udvikling	20
3.3.2 Picard betingelsen	21
3.3.3 Singulær værdi dekomposition	22
3.3.4 Regulering	22
3.3.5 Den diskrete Picard betingelse	23
3.4 Delkonklusion	23
4 Diskretisering	24
4.1 Visualisering af funktioner i <i>Hallén's</i> integralligning	24
4.1.1 Visualisering af kernen	25
4.1.2 Visualisering af højresiden	25

4.2	Trapez metoden	26
4.3	Produkt trapez metoden	27
4.4	Bestemmelse af <i>Hallén's</i> konstant	31
4.5	Delkonklusion	32
5	Eksperiment med kvadratur	33
5.1	Definition af integraler	33
5.2	Trapez metoden	34
5.2.1	Richardson analyse af trapez metoden	35
5.2.2	Trapez metoden vs. numerisk kvadratur i <i>Mathematica</i>	36
5.3	Produkt trapez metoden	37
5.3.1	Richardson analyse af produkt trapez metoden	38
5.3.2	Produkt trapez metoden vs. numerisk kvadratur i <i>Mathematica</i>	39
5.4	Delkonklusion	40
6	Test	41
6.1	Test af trapez metoden anvendt på <i>Hallén's</i> ligning	41
6.2	Test af produkt trapez metoden anvendt på <i>Hallén's</i> ligning	45
6.3	Et forsøg på ændring af modellen	48
6.4	Delkonklusion	51
7	Sammenfatning	52
7.1	Diskussion	53
7.2	Konklusion	54
	Litteratur	55
A	Maxwell's ligninger	57
A.1	Maxwell's ligninger på integralform	57
A.1.1	Maxwell's 1. ligning på integralform	57
A.1.2	Maxwell's 2. ligning på integralform	57
A.1.3	Maxwell's 3. ligning på integralform	58
A.1.4	Maxwell's 4. ligning på integralform	58
A.1.5	Maxwell's fire ligninger på integralform	59
A.2	Maxwell's ligninger på differentialform	60
A.2.1	Maxwell's 1. ligning på differentialform	60
A.2.2	Maxwell's 2. ligning på differentialform	60
A.2.3	Maxwell's 3. ligning på differentialform	61
A.2.4	Maxwell's 4. ligning på differentialform	61
A.2.5	Maxwells fire ligninger på differential form	61
B	Vektor potentialet A for en elektrisk strømkilde J	62
C	Løsning af den inhomogene vektor bølgeligning	64
D	Moment metoden anvendt på <i>Pocklington's</i> ligning	67
E	CD	69

Figurer

2.1	Koordinatsystem til antenne beregninger.	5
2.2	Geometri for den lineær cylindrisk dipol antenne.	5
2.3	Delta-gap model for cylindrisk lineær dipol antenne.	6
2.4	Magnetic frill generator model for cylindrisk lineær dipol antenne.	7
2.5	Geometri for dipol antennen.	9
2.6	Strøm på overfladen af dipol antennen.	9
2.7	Strøm i centrum af dipol antennen.	12
4.1	Tredimensionelt plot af den absolutte værdi af kernen $K(x, y)$ i <i>Hallén's</i> integral- ligning.	25
4.2	Densitetsplot af den absolutte værdi af kernen $K(x, y)$ i <i>Hallén's</i> integralligning.	25
4.3	Plot af den absolutte værdi af højresiden $D_1(x)$ i <i>Hallén's</i> integralligning.	26
5.1	Plot af funktionerne $h_1(x)$, $h_2(x)$ og $h_3(x)$	33
5.2	Plot af funktionerne $j_1(x)$, $j_2(x)$ og $j_3(x)$	34
6.1	$I_{n=4}$ for <i>trapez metoden</i>	41
6.2	$I_{n=8}$ for <i>trapez metoden</i>	41
6.3	$I_{n=16}$ for <i>trapez metoden</i>	42
6.4	$I_{n=32}$ for <i>trapez metoden</i>	42
6.5	$I_{n=64}$ for <i>trapez metoden</i>	42
6.6	$I_{n=128}$ for <i>trapez metoden</i>	42
6.7	$I_{n=256}$ for <i>trapez metoden</i>	42
6.8	$I_{n=512}$ for <i>trapez metoden</i>	42
6.9	$I_{n=1024}$ for <i>trapez metoden</i>	43
6.10	$\Im m(I_{n=256})$	43
6.11	$\Im m(I_{n=512})$	43
6.12	$\Im m(I_{n=1024})$	43
6.13	$\Re e(I_{n=256})$	44
6.14	$\Re e(I_{n=512})$	44
6.15	$\Re e(I_{n=1024})$	44
6.16	Plot af de singulære værdier σ_i og koefficienterne $ u_i^T b $ for <i>Hallén's</i> integralligning (4.1), diskretiseret med <i>trapez metoden</i> og for $n = 64$	45
6.17	$I_{n=4}$ for <i>produkt trapez metoden</i>	46
6.18	$I_{n=8}$ for <i>produkt trapez metoden</i>	46
6.19	$I_{n=16}$ for <i>produkt trapez metoden</i>	46
6.20	$I_{n=32}$ for <i>produkt trapez metoden</i>	46
6.21	$I_{n=64}$ for <i>produkt trapez metoden</i>	46

6.22	$I_{n=128}$ for <i>produkt trapez metoden</i>	46
6.23	$I_{n=256}$ for <i>produkt trapez metoden</i>	47
6.24	$I_{n=512}$ for <i>produkt trapez metoden</i>	47
6.25	$I_{n=1024}$ for <i>produkt trapez metoden</i>	47
6.26	Plot af de singulære værdier σ_i og koefficienterne $ u_i^T b $ for <i>Hallén's</i> integralligning (4.1), diskretiseret med <i>produkt trapez metoden</i> og for $n = 64$	48
6.27	Sammenligning af funktionerne $D_1(x)$ og $D_2(x)$	49
6.28	$I_{n=4}$ for modificeret højreside og bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	49
6.29	$I_{n=8}$ for modificeret højreside og bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	49
6.30	$I_{n=16}$ for modificeret højreside og bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	50
6.31	$I_{n=32}$ for modificeret højreside og bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	50
6.32	$I_{n=64}$ for modificeret højreside og bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	50
6.33	$I_{n=128}$ for modificeret højreside og bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	50
6.34	$I_{n=256}$ for modificeret højreside og bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	50
6.35	$I_{n=512}$ for modificeret højreside og bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	50
6.36	$I_{n=1024}$ for modificeret højreside og med <i>produkt trapez metoden</i>	51
C.1	Koordinatsystem med kilde placeret i origo.	64
C.2	Koordinatsystem med kilde placeret i rummet	66
D.1	<i>Moment metoden</i> for $n = 64$	67
D.2	<i>Moment metoden</i> for $n = 128$	67
D.3	<i>Moment metoden</i> for $n = 256$	68
D.4	<i>Moment metoden</i> for $n = 512$	68

Tabeller

5.1	Iterationstabel for $h(x)$ bestemt med <i>trapez metoden</i>	35
5.2	Iterationstabel for $j(x)$ bestemt med <i>trapez metoden</i>	35
5.3	Vurdering af konvergensorden og fejl for $h_1(x)$ bestemt med <i>trapez metoden</i>	36
5.4	Vurdering af konvergensorden og fejl for $j_1(x)$ bestemt med <i>trapez metoden</i>	36
5.5	Sammenligning af <i>trapez metoden</i> og <i>Mathematica's</i> indbyggede funktion <i>NIntegrate</i>	37
5.6	Iterationstabel for $h(x)$ bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	38
5.7	Iterationstabel for $j(x)$ bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	38
5.8	Vurdering af konvergensorden og fejl for $h_1(x)$ bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	39
5.9	Vurdering af konvergensorden og fejl for $j_1(x)$ bestemt med <i>produkt trapez metoden</i>	39
5.10	Sammenligning af <i>produkt trapez metoden</i> og <i>Mathematica's</i> indbyggede funktion <i>NIntegrate</i>	40
6.1	Iterationstabel for <i>trapez metoden</i> anvendt på <i>Hallén's</i> ligning.	44
6.2	Iterationstabel for <i>produkt trapez metoden</i> anvendt på <i>Hallén's</i> ligning.	47
D.1	Iterationstabel for <i>Moment metoden</i> anvendt på <i>Pocklington's</i> ligning.	68
E.1	Indhold af CD	69

Kapitel 1

Introduktion

I dette kapitel introduceres de problemer der opstår i forbindelse med analyse og design af antennesystemer.

1.1 Historisk perspektiv

Den danske fysiker *H.C. Ørsted* opdagede forbindelsen mellem elektricitet og magnetisme - den såkaldte *elektromagnetisme*, som i 1873 blev matematisk formuleret af den skotske matematiske fysiker *James Clerk Maxwell*. Maxwell's arbejde resulterede i fire partielle differentialligninger - de berømte fire ligninger vi i dag kender som ¹*Maxwell's ligninger*. Ørsted's eksperimenter og Maxwell's matematiske fortolkning af Ørsted's resultater lagde grunden til en helt ny æra indenfor elektrofysik og ingeniørvidenskab, nemlig fysikken for elektromagnetiske signalers udbredelse i rummet - eller teorien om trådløs kommunikation.

I 1886 demonstrerede fysikeren *Heinrich Rudolph Hertz*, det første meget primitive trådløse elektromagnetiske system. Hertz viste, ved at sætte en meget stor strøm til en elektrisk dipol, at det var muligt at frembringe en gnist i en cirkulær spole, som befandt sig i umiddelbar nærhed, men uden at være forbundet til systemet.

Først i 1901 lykkedes det at sende elektromagnetiske bølger over større afstande. I dette år udførte *Guglielmo Marconi*, som den førte, en trådløs transatlantisk transmission fra Poldhu i Cornwall, England til St. John's, Newfoundland. Den transmitterende antenne i Cornwall bestod af 50 elektriske ledende wire, formet som en vifte og støttet af to 60 meter lange træblokke. Den modtagende antenne i St. John's bestod af en 200 meter lang wire, båret og støttet af en drage. Det var begyndelsen på en ny videnskab - ingeniørvidenskaben om antenner.

Anden Verdenskrig satte også sit præg på udviklingen af antenner. Behovet for at kunne kommunikere trådløst over større afstande, samt på tværs af landegrænser, betød at mere avancerede antennesystemer blev udviklet i denne periode. Men det var først i 1960'erne, med fremkomsten af den moderne computer, at der for alvor blev sat fart i teorien om antenner. Tidligere blev design og dimensionering af antennesystemer betragtet som overflødige faser i udviklingen. Forfatteren af bogen "*Antenna Theory Analysis and Design*", Constantine A. Balanis [2], beskriver at man i første halvdel af dette århundrede, nærmest benyttede sig af "cut and try" teknikken i forbindelse med udvikling af antennesystemer. Med den moderne computer (PC) er analyse og design af antennesystemer blevet naturlige faser i udviklingen. Desuden er metoderne blevet meget præcise, således at man ved hjælp af matematiske modeller kan foretage computersimuleringer,

¹Se bilag A for en præsentation af *Maxwell's ligninger*.

og dermed forudse hvorledes en given antenne opfører sig. Faktisk er det ikke unormalt, at man i udviklingen af nye antenner, fortsætter direkte fra designfasen til realisering af prototypen, uden at foretage eksperimentielle målinger på forsøgsopstillinger i mellemtiden.

1.2 Problemstilling

Dette bachelorprojekt fokuserer på en problemstilling, som stammer fra elektrodynamikken, nemlig at bestemme den elektriske strømfordeling der opstår i en elektrisk ledende dipol, når denne er placeret i et elektrisk felt. Et problem som blev formuleret i 1897 af *Pocklington* [15] og modificeret i 1938 af *Hallén* [8]-[9]. Problemet har sin berettigelse i forbindelse med teorien for antenner, idet det opstår når man ønsker at bestemme den strøm, som induceres i en dipol antenne, når denne modtager et elektrisk signal. Faktisk regnes netop dipol antennen, som en af de simpleste antennetyper. Ikke desto mindre, viser denne antenne et generelt problem i forbindelse med design og dimensionering af antennesystemer af meget højere kompleksitetsgrad, idet strømfordelingen og dermed strømmen anses for at være essentielle parametre i antenne. Med kendskab til disse parametre er man i stand til at beregne forskellige karakteristika for antennen. Et eksempel på en vigtig parameter er antennens *karakteristiske impedans*, der sikre at signalerne ikke reflekteres når de opfanges af antennen.

Et andet eksempel er det elektriske felt, der opstår i en given afstand fra antennen og som giver anledning til en vigtig grafisk repræsentation - det såkaldte *elektriske fjernfelt* for antennen. Det elektriske fjernfelt er et mål for størrelsen og retningen af det elektriske felt i en given afstand fra antennen. Kendskab til størrelsen af det elektriske fjernfelt kan være af stor interesse i forbindelse med design og dimensionering af store antennesystemer. Hvis f.eks. en antenne indgår i et system bestående af flere antenner, kan det elektriske fjernfelt fra den pågældende antenne virke forstyrende på andre antenner i systemet - og i værste fald ødelægge det endelige signal. I kraft af matematiske modeller og computersimuleringer kan man opnå *a priori* kendskab til det elektriske fjernfelt, og dermed sikre at signalerne ikke interfererer destruktivt.

At geometrien for en enkelt antenne er kompleks eller at flere antenner tilsammen udgør et samlet system, ændre ikke ved det faktum at strømfordelingen skal bestemmes på tilsvarende måde som for dipol antennen. Dermed anskueliggøre dette projekt, dog i lavere detaljeringsgrad, de problemer der er forbundet med design af antennesystemer.

1.3 Antenne design

I forbindelse med analyse af et specifikt antennesystem er man generelt interesseret i, at bestemme karakteristiske egenskaber for systemet. Parametre som f.eks. antennens *impedans* samt antennens *elektriske fjernfelt* bestemmes ofte i analysefasen. I *designfasen*² bestemmes antennens hardware egenskaber, dvs. hvilken størrelse, længde, vinkler samt geometri antennen skal have for at opfylde de tidligere nævnte krav til impedans, fjernfelt og eventuelle andre betingelser fastsat i analysen. Pga. disse forhold er det vanskeligt, og ofte umuligt, at vælge en specifik antennemodel på forhånd, da man dermed har afskåret sig fra eventuelle modeller som kan realisere kravene.

Dette projekt fokuserer imidlertid ikke på elementerne i designfasen, men derimod på analysefasen - mere præcist metoder til bestemmelse af den elektriske strømfordeling i dipol antennen. For beskrivelse af metoder i syntese fasen henvises til [1], [2] samt [18]

²Også kaldt *syntese fasen* i mange lærebøger.

1.4 Rapportens organisering

I kapitel 2 beskrives den matematiske model, som danner grundlaget for den *lineære cylindriske dipol antenne*. Kapitlet introducerer to væsentlige integralligninger i forbindelse med antenneteorien - henholdsvis *Hallén's* integralligning og *Pocklington's* integralligning, der begge udtrykker sammenhængen mellem strømfordelingen i antennen og det eksterne elektriske felt der virker på antennen.

Kapitel 3 omhandler *Fredholm integralligninger af 1. og 2. art*, med primær fokus på numerisk løsning af disse integralligninger. Desuden beskrives forskellige analysemetoder, som med fordel kan anvendes i forbindelse med løsning af *Fredholm integralligninger af 1. art*.

I kapitel 4 diskretiseres *Hallén's* integralligning med henholdsvis *trapez metoden* og *produkt trapez metoden*.

Kapitel 5 omhandler ikke integralligninger, men istedet testes *trapez metoden* og *produkt trapez metoden* på nogle udvalgte integraler, som har meget til fælles med de funktioner der indgår i *Hallén's* integralligning.

I kapitel 6 præsenteres resultaterne af de tests, der er blevet udført i forbindelse med løsning af *Hallén's* integralligning. Kapitlet indeholder resultater for *trapez metoden* og *produkt trapez metoden*. Endelige sammenfattes projektet i kapitel 7.

Kapitel 2

Matematisk modellering

For at bestemme numeriske løsninger til *Hallén's* og *Pocklington's* ligninger, er det en forudsætning at forstå den matematiske model bag disse ligninger. Dette kapitel beskriver den matematiske model, der ligger til grund for henholdsvis *Hallén's*- og *Pocklington's* integralligninger.

2.1 Antenne model

Behovet for udveksling af store mængder elektronisk information over stadig større afstande, stiller høje teknisk krav til det udstyr som skal varetage disse transmissioner. Man har tidligere gjort, og gør stadig, brug af kabler som transmissionsmedium, men eftersom denne løsning er meget resourcekrævende i form af vedligeholdelse og opgradering, er trådløs udveksling af information blevet attraktiv. Dette stiller imidlertid nogle krav til de antenner, som skal afsende og modtage den information. Som nævnet i indledningen, beror udviklingen af antennesystemer i høj grad på matematiske modeller og simuleringer af disse. I litteraturen om analyse og design af antenner, opererer man typisk man to beregningsmodeller - en metode baseret på *integralligninger* og en metode baseret på *geometrisk diffraktion af bølger*.

Metoden baseret på integralligninger går, som navnet antyder ud på at formulere antenneproblemet som en eller flere integralligninger. Den matematiske opstilling af integralligningerne baseres på kendskab til forskellige parametre, som f.eks. antennens geometri samt størrelse og udseende af de signaler antennen skal afsende/modtage. Ofte indgår den ubekendte, som regel den inducerede strøm, som en del af integranden. Og ofte kan integralligningerne identificeres som *Fredholm integral ligninger af 1. art*. Dvs. de er på formen

$$\int_a^b K(x, y) f(y) dy = g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (2.1)$$

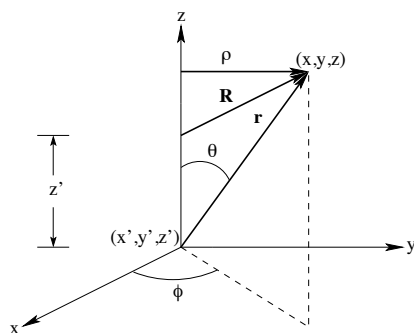
hvor både funktionen $K(x, y)$ kaldt *kernen* og funktionen $g(x)$ er kendte, mens $f(y)$ er den ukendte funktion som ønskes bestemt i intervallet $[a, b]$. Selv for simple antennesystemer, som kun involverer én integralligning på formen (2.1), kan det være særdeles kompliceret at finde analytiske løsninger. I antennesystemer med flere indbyrdes forbundne antenner, optræder integralligningerne som koblede ligninger, hvilket ofte gør det umuligt at bestemme løsningen analytisk. Det betyder, at man i praksis benytter numeriske metoder til løsning af integralligningerne. Ved at anvende numeriske metoder til løsning af integralligningerne fås en række *diskrete* udgaver af (2.1), derved reduceres problemet til løsning af en række ligningssystemer.

Metoden baseret på geometrisk diffraktion af bølger, bruger elementer fra *klassisk geometrisk optik*. Metoden er anvendelige i forbindelse med modellering af antennesystemer, som har en kom-

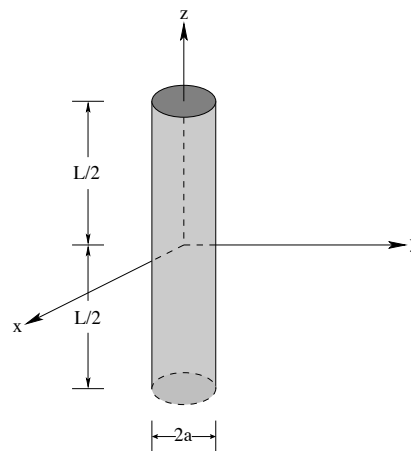
pliceret geometri og hvor metoden baseret på integralligninger vil fører til tilsvarende komplekse ligninger. Desuden har metoden vist sig at være velegnet til modellering af antennesystemer, som behandler signaler med høje frekvenser. Vi vil i dette projekt ikke behandle metoden baseret på geometrisk diffraktion af bølger, men udelukkende anvende integralligninger til modellering. En detaljeret beskrivelse af metoden om geometrisk diffraktion findes i [3].

2.2 Lineær cylindrisk dipol antenne

I forbindelse med modellering af antenner anvendes forskellige koordinater og dermed forskellige koordinatsystem. På figur 2.1 ses det koordinatsystemet, som de efterfølgende beregninger tager udgangspunkt i. Den antenne der behandles i dette projekt er en *lineær cylindrisk dipol antenne*. Som det fremgår af figur 2.2, har dipol antennen form som en cylinder med radius a og længde L . Antennens centrum er placeret i origo, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, således der opnås symmetri.



Figur 2.1: Koordinatsystem til antenne beregninger.



Figur 2.2: Geometri for den lineær cylindrisk dipol antenne.

For at en antenne er i stand til at afsende og modtage elektriske signaler, er det en forudsætning at antennen er tilsluttet en spændingskilde. I forbindelse med modellen for en lineær cylindrisk dipol antenne, anvendes der to forskellige modeller for spændingskilden - henholdsvis *Delta-gap modellen* og *Magnetic frill generator modellen*. Disse gennemgås i de følgende to afsnit.

2.2.1 Delta-gap modellen

Delta-gap modellen er den simpleste og mest anvendte model for den lineære dipol antenne, men også den mest upræcise. Figur 2.3 viser Delta-gap modellen for den lineære cylindrisk dipol antenne. I Delta-gap modellen "klippes" antennen over på midten, således at der opstår et mellemrum mellem de to ledende cylindre. Størrelsen af mellemrummet angives ved Δ . Mellem de to elektrisk ledende cylindre er der tilsluttet en spændingsgenerator, således der opstår et konstant spændingsfald V_i mellem de to cylindre. Spændingsfaldet V_i kaldes *terminalspændingen* eller *magnetiseringspændingen*. Udsættes den cylindrisk dipol antenne for et indkommende

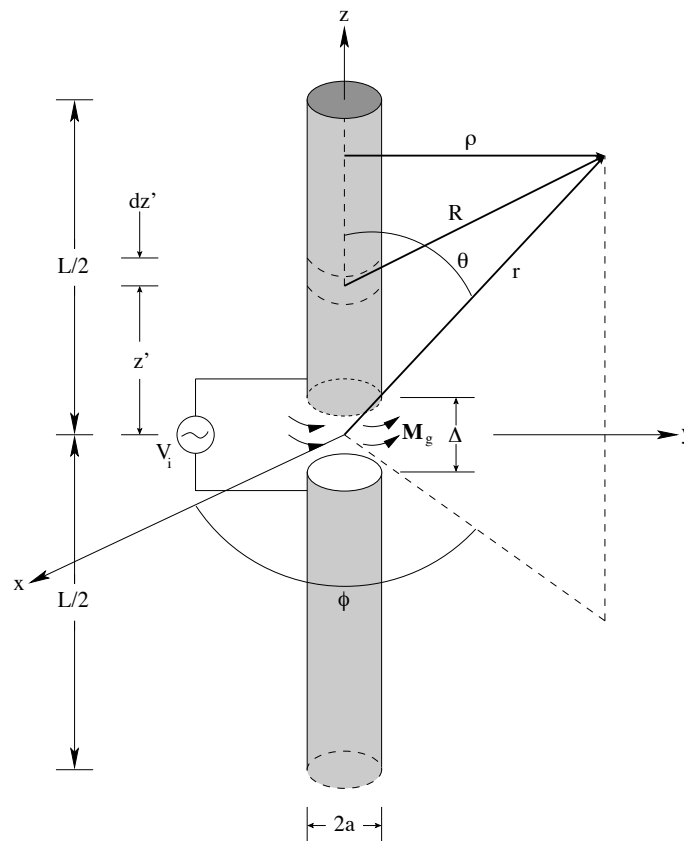
elektrisk felt E_z^i , gælder relationen

$$E_z^i(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -L/2 \leq z \leq L/2) = \frac{V_i}{\Delta}. \quad (2.2)$$

Det betyder det elektriske felt E_z^i er konstant henover mellemrummet Δ og nul alle andre steder. I praksis erstattes mellemrummet Δ af tynde strimler fremstillet af et elektrisk ledende materiale, derved opstår der en magnetisk strømtæthed M_g på overfladen af antennen. Den magnetiske strømtæthed er givet ved

$$\begin{aligned} M_g &= -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^i \\ &= -\mathbf{a}_\rho \times \mathbf{a}_z \frac{V_i}{\Delta} \\ &= \mathbf{a}_\phi \frac{V_i}{\Delta} \quad -\frac{\Delta}{2} \leq z' \leq \frac{\Delta}{2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

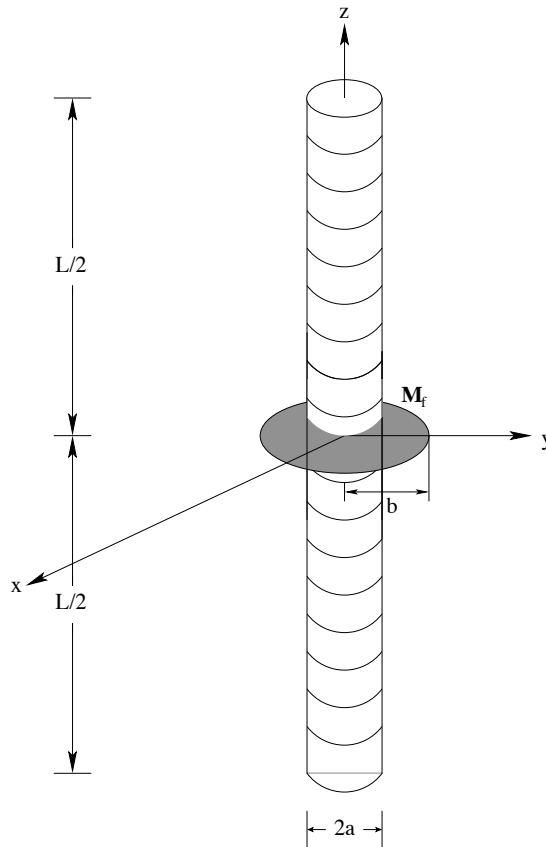
hvor \mathbf{a}_ρ , \mathbf{a}_z og \mathbf{a}_ϕ er enhedsvektorer med orientering i henholdsvis ρ -, z - og ϕ -retningen. Den magnetiske strømtæthed er skitseret i figur (2.3)



Figur 2.3: Delta-gap model for cylindrisk lineær dipol antenne.

2.2.2 Magnetic frill generator modellen

Magnetic frill generator modellen for den lineære dipol antenne ses på figur 2.4. Som det fremgår er mellemrummet mellem de to cylindriske ledere erstattet af en ringformet skive med hul i midten. Den indre radius af den cirkulære skive svarer til radius af dipolen, altså a . Den ydre radius betegnes b , og bestemmes ud fra oplysninger om den karakteristiske impedans af antennens transmissionskabler. Den magnetiske strømtæthed fra generatoren betegnes \mathbf{M}_f . I følge [2] er det



Figur 2.4: Magnetic frill generator model for cylindrisk lineær dipol antenne.

elektriske felt mellem de cirkulære ledere givet ved

$$\mathbf{E}_f = \mathbf{a}_\rho \frac{V_i}{2\rho' \ln(b/a)} \quad a \leq \rho' \leq b. \quad (2.4)$$

Den magnetiske strømtæthed kan skrives

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_f &= -2\mathbf{n} \times \mathbf{E}_f \\ &= -2\mathbf{a}_z \times \mathbf{a}_\rho E_\rho \\ &= -\mathbf{a}_\phi \frac{V_i}{\rho' \ln(b/a)} \quad a \leq \rho' \leq b. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Igen med reference til [2], kan det indkommende elektriske felt E_z^i på overfladen af antennen skrives

$$E_z^i(\rho = a, 0 \leq \phi \leq 2\pi, -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}) \simeq -V_i \left(\frac{k(b^2 - a^2)e^{-jkR_0}}{8 \ln(b/a)R_0^2} \left\{ 2 \left[\frac{1}{kR_0} + j \left(1 - \frac{b^2 - a^2}{2R_0^2} \right) \right] + \frac{a^2}{R_0} \left[\left(\frac{1}{kR_0} + j \left(1 - \frac{b^2 - a^2}{2R_0^2} \right) \right) \left(-jk - \frac{2}{R_0^2} \right) + \left(-\frac{1}{kR_0^2} + j \frac{b^2 + a^2}{R_0^3} \right) \right] \right\} \right) \quad (2.6)$$

hvor

$$R_0 = \sqrt{z^2 + a^2}. \quad (2.7)$$

Feltet fra (2.6) kan approksimeres, idet man lader $\rho = 0$, hvilket betyder at feltet udbreder sig lange z -aksen af antennen. Da bliver

$$E_z^i(\rho = 0, -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2}) = -\frac{V_i}{2 \ln(b/a)} \left[\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + \frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \right] \quad (2.8)$$

hvor

$$R_1 = \sqrt{z^2 + a^2} \quad (2.9)$$

$$R_2 = \sqrt{z^2 + b^2} \quad (2.10)$$

2.3 Pocklington's integralligning

Antag at et indkommende elektrisk felt $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$ virker i retning af en perfekt elektrisk ledende dipol antenne, således at dele af det elektriske felt interagerer med dipol antennen som vist i figur 2.5. Derved induceres en lineær strømtæthed \mathbf{J}_s på overfladen af den ledende dipol antenne. Den inducerede strømtæthed \mathbf{J}_s bevirker imidlertid, at der opstår et nyt elektrisk felt $\mathbf{E}^s(\mathbf{r})$, som har retning væk fra antennen. Det betyder at det totale elektriske felt $\mathbf{E}^t(\mathbf{r})$, et hvilket som helst sted i rummet, er bestemt ved summen af det indkommende elektriske felt $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$ og det inducerede elektriske felt $\mathbf{E}^s(\mathbf{r})$ - dvs.

$$\mathbf{E}^t(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) \quad (2.11)$$

hvor

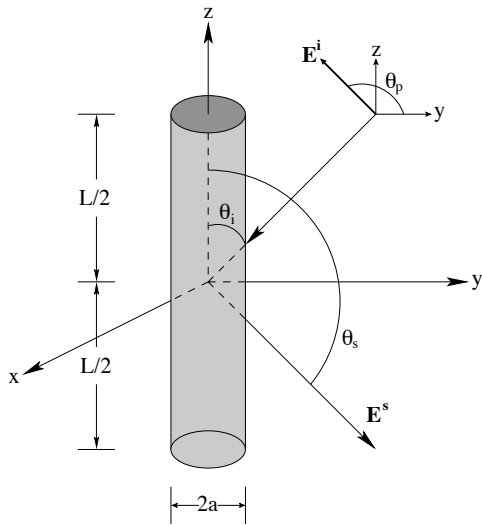
$\mathbf{E}^t(\mathbf{r})$ = det totale elektriske felt.

$\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$ = det indkommende elektriske felt.

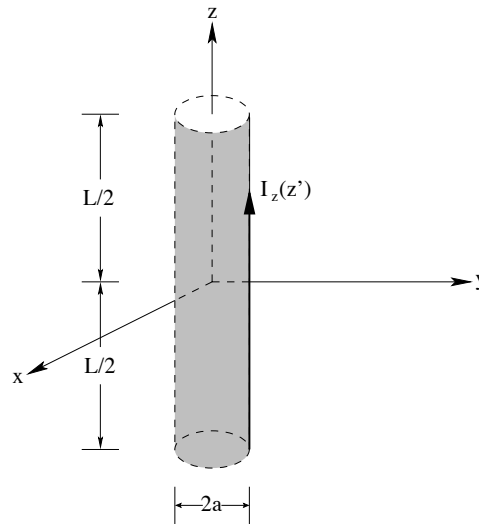
$\mathbf{E}^s(\mathbf{r})$ = det inducerede elektriske felt.

Ligning (2.11) beskriver det generelle tilfælde, hvor observationspunktet findes et vilkårligt sted i rummet. Betragtes i stedet situationen, hvor observationspunktet flyttes til overfladen af antennen - dvs. når $r = r_s$. I dette tilfælde forsvinder det totalt tangentielle felt $\mathbf{E}^t(\mathbf{r})$. I cylindriske koordinater har det elektriske felt induceret af dipole antennen to komponenter - en radial komponent E_ρ og en tangential komponent E_z . Det betyder at på overfladen af antennen reduceres den tangentielle komponent i (2.11) til

$$E_z^t(r = r_s) = E_z^i(r = r_s) + E_z^s(r = r_s) = 0 \quad (2.12)$$



Figur 2.5: Geometri for dipol antennen.



Figur 2.6: Strøm på overfladen af dipol antennen.

eller

$$E_z^s(r = r_s) = -E_z^i(r = r_s). \quad (2.13)$$

Generelt gælder det, at det ¹elektriske felt $\mathbf{E}^s(\mathbf{r})$, genereret af den inducerede strømtæthed J_s opfylder

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) &= -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) \\ &= -j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}[k^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})] \end{aligned} \quad (2.14)$$

hvor $j = \sqrt{-1}$ angiver den imaginære enhed.

Da vi betragter det elektriske felt på overfladen af antennen, er det kun bidraget fra z komponenten i (2.14) der er interessant. Dermed reduceres den differentielle vektorligning (2.14) til en partiel differentialligning. Dvs.

$$E_z^s(r) = -j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\left(k^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right). \quad (2.15)$$

Det gælder generelt, at ²potentialfunktionen kan skrives

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int \int_S \mathbf{J}_s(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} ds'. \quad (2.16)$$

Da vi kun er interesseret i bidraget fra z komponenten, reduceres (2.16) til

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int \int_S J_z \frac{e^{-jkR}}{R} ds'$$

¹Se bilag B ligning (B.18) for yderligere udledning.

²Se bilag C ligning (C.13) for yderligere udledning.

$$= \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^{2\pi} J_z \frac{e^{-jkR}}{R} a d\phi' dz'. \quad (2.17)$$

Hvis antennen er meget tynd afhænger strømtætheden J_z ikke af *azimuthal* vinklen ϕ , derfor gælder det at

$$2\pi a J_z = I_z(z') \Rightarrow J_z = \frac{1}{2\pi a} I_z(z') \quad (2.18)$$

hvor $I_z(z')$ angiver den strøm, der løber i radial afstand $\rho = a$ langs antennens z -akse, som vist i figur 2.6. Dermed reduceres (2.17) til

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[\frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{R} a d\phi' \right] dz' \quad (2.19)$$

hvor R er givet ved

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} \\ &= \sqrt{\rho^2 + a^2 - 2\rho a \cos(\phi - \phi') + (z-z')^2} \end{aligned} \quad (2.20)$$

her angiver ρ den radiale afstand fra antennen til observationspunktet og a angiver antennens radius.

Pga. symmetri i det udgående elektriske felt, afhænger observationerne ikke længere af vinklen ϕ . Derfor vælges $\phi = 0$. Desuden bevirker randbetingelserne på overfladen af antennen, at z -komponenten af det elektriske felt forsvinder, dvs. $\rho = a$. Det betyder at

$$\begin{aligned} A_z(\rho = a) &= \mu \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi' \right) dz' \\ &= \mu \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') G(z, z') dz' \end{aligned} \quad (2.21)$$

hvor $G(z, z')$ er Green's funktion og kaldes den *eksakte kerne*. Det gælder at

$$G(z, z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} d\phi'. \quad (2.22)$$

Og for $\rho = a$ er R givet ved

$$R(\rho = a) = \sqrt{4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (z - z')^2}. \quad (2.23)$$

For $\rho = a$ kan z -komponenten af det inducerede/udgående elektriske felt skrives som

$$E_z^s(\rho = a) = -j \frac{1}{\omega\epsilon} \left(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') G(z, z') dz', \quad (2.24)$$

som ved brug af (2.13) omskrives til

$$-j \frac{1}{\omega\epsilon} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') G(z, z') dz' = -E_z^i(\rho = a) \quad (2.25)$$

eller

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') G(z, z') dz' = -j\omega\epsilon E_z^i(\rho = a). \quad (2.26)$$

Ombyttes integration og differentiation i (2.26) fås

$$\int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) G(z, z') \right] dz' = -j\omega\epsilon E_z^i(\rho = a) \quad (2.27)$$

hvor $G(z, z')$ er givet (2.22).

Ligning (2.27) kaldes *Pocklington's integralligning* eller ³*Pocklington's integro-differential ligning*. Ligning (2.27) benyttes til bestemmelse af strømmen $I_z(z')$, hidrørende fra det indkommende elektriske felt E_z^i .

I dette projekt anvendes imidlertid en approksimation af kernen $G(z, z')$, som indgår på venstresiden af *Pocklington's ligning*. For at forstå denne approksimation antages det, at dipol antennen er meget tynd, hvilket betyder at $a \ll \lambda$ - dvs. antennens radius a er meget mindre end bølgelængde λ af det indkommende elektriske felt E_z^i . Dermed reduceres (2.22) til

$$G(z, z') = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R}. \quad (2.28)$$

Ligning (2.28) kaldes den *approksimerede* eller *reducerede kerne*.

Antages det desuden, at den inducerede strøm løber langs centrum af dipol antennen - dvs. $\rho = 0$, reduceres (2.23) til

$$R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}. \quad (2.29)$$

2.4 Hallén's integralligning

Hallén's integralligning er en modifikation af *Pocklington's* integralligning. *Pocklington's* ligning er den mest generelle af de to, forstået på den måde at den kan tilpasses antenner med vilkårlig geometri. Derimod er *Hallén's* ligning begrænset til dipol antennen.

Med reference til figur 2.5 antages det, at længden af dipol antennen er væsentlig større en antennens radius - dvs. $L \gg a$. Samtidig antages det at antennens radius er meget mindre end bølgelængden λ - dvs. $a \ll \lambda$. Dermed ses der bort fra udstråling i enden af antennen. Disse antagelser udgør randbetingelserne for dipol antennen. Nemlig, at det totale tangentielle elektriske felt \mathbf{E} på overfladen af antennen er forsvindende, samt at strømmen i enden af antennen er nul - dvs. $I(-\frac{L}{2}) = I(\frac{L}{2}) = 0$.

Eftersom strømtheden \mathbf{J} løber langs cylinderen i retning af z -aksen, dvs. $\mathbf{J} = \mathbf{a}_z J_z$, gælder det ifølge (B.17) og (C.13) i henholdsvis bilag B og ??, at

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_z A_z(z'). \quad (2.30)$$

For små radier er (2.30) kun en funktion af z' . Derfor reduceres (B.18) til

$$\begin{aligned} E_z^i &= -j\omega A_z - j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \\ &= -j \frac{1}{\omega\mu\epsilon} \left[\frac{d^2 A_z}{dz^2} + \omega^2 \mu\epsilon A_z \right]. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Da det totale tangentielle elektriske felt E_z^i forsvinder på overfladen af antennen, reduceres (2.31) til

$$\frac{d^2 A_z}{dz^2} + k^2 A_z = 0. \quad (2.32)$$

³Hvis den afledte til løsningen indgår i en integralligning, kaldes ligningen for en *integro-differential ligning*. Se [4] for numerisk behandling af disse ligninger.

Eftersom strøm tæthedens er symmetrisk - dvs. $J_z(-z') = J_z(z')$, er potentialet A_z også symmetrisk - dvs. $A_z(-z') = A_z(z')$. Derfor er løsningen til differentialligningen (2.32) givet ved

$$A_z(z) = -j\sqrt{\mu\epsilon}(C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(k|z|)) \quad (2.33)$$

hvor C_1 og C_2 er konstanter. For en elektrisk ledende cylinder er potentialet A_z , også givet ved kurveintegralet (C.14) i bilag ???. En sammenligning af (2.33) og (C.14) giver

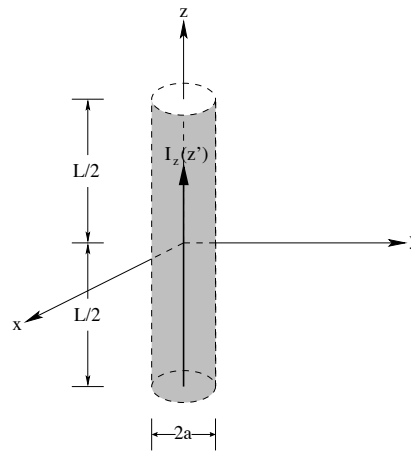
$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' &= -j\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left(C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(k|z|) \right) \\ \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} dz' &= -\frac{j}{\eta} \left(C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(k|z|) \right) \end{aligned} \quad (2.34)$$

idet $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$. Ligning (2.34) kaldes *Hallén's* integralligning og anvendes, ligesom *Pocklington's* integralligning til bestemme af den inducerede strøm i en dipol antenne, hidrørende fra et eksternt elektrisk felt. Som det fremgår af (2.34) indgår der to konstanter - henholdsvis C_1 og C_2 . Konstanten C_1 skal bestemmes ud fra randbetingelsen $I(-\frac{L}{2}) = I(\frac{L}{2}) = 0$, mens konstanten C_2 afhænger af terminalspændingen V_i . Det gælder for dipol antennen, at $C_2 = V_i/2$.

Vi ønsker som tidligere nævnt at bestemme en numerisk løsning til (2.34), lad os imidlertid klassificere *Hallén's* ligning. Af ligning (2.1) ses det, at *Hallén's* ligning er en *Fredholm integral-ligning af 1. art*. Vi identificerer kernen i (2.34) svarende til den *reducerede* kerne (2.28), som indgår i *Pocklington's* ligning. Samtidig benytter vi udtrykket

$$R = \sqrt{a^2 + (z - z')^2} \quad (2.35)$$

modsat udtrykket i (2.23), som er mere generelt, idet man her antager at den inducerede strøm løber på overfladen af dipol antennen. Ligning (2.35) udtrykker implicit, at vi antager at den inducerede strøm løber langs centrum af dipol antennen, som vist på figur (2.7). Med disse



Figur 2.7: Strøm i centrum af dipol antennen.

antagelser er kernen i *Hallén's* integralligning blevet væsentlig enklere. Og umiddelbart skulle man forvente, at en numerisk løsning af (2.34) vil blive tilsvarende enklere. Dette er imidlertid ikke tilfældet, som vi senere skal se, giver ovenstående approksimationer problemer for konvergensten af de numeriske metoder.

2.5 Sinus approksimation af strømmen

Vi ønsker at få en fornemmelse af hvordan løsningen af *Hallén's* integralligning ser ud. I litteraturen om den lineære dipol antenne, approksimeres strømmen $I_z(z)$ i (2.34) ofte som en sinus-kurve. For at forstå denne approksimation betragtes ligningen

$$\int_{-L/2}^{L/2} G(z-z')I_z(z') dz' = V(z) = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(k|z|) \quad (2.36)$$

hvor $G(z-z')$ er givet ved

$$G(z-z') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{a^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}. \quad (2.37)$$

Når integrationsvariablen z' bliver større end z , vil nævneren i (2.37) blive meget stor - idet nævneren vil svare til $4\pi a$ i punktet $z' = z$. Derfor er integralet i (2.36) domineret af værdien af integranden nær $z' = z$. En approksimation af (2.36) er

$$\begin{aligned} \int_{-L/2}^{L/2} G(z-z')I_z(z') dz' &\simeq \bar{G}(z) I_z(z) \\ &\simeq \bar{G} I_z(z) \end{aligned} \quad (2.38)$$

hvor $\bar{G}(z)$ er en form for middelværdi af $G(z-z')$ i omegnen af punktet $z' = z$. Størrelsen $\bar{G}(z)$ varierer langsomt med z , derfor approksimeres $\bar{G}(z)$ med konstanten \bar{G} , som det fremgår af udtrykket (2.38). Det betyder, at (2.36) tilnærmelsesvis kan skrives

$$\bar{G}I_z(z) = V(z) = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(k|z|). \quad (2.39)$$

Udtrykket (2.39) viser at $I_z(z)$ tilnærmelsesvis er en sinusfunktion. Konstanten C_1 er fastsat af randbetingelsen $I(-L/2) = I(L/2) = 0$, som giver

$$C_1 \cos(kL/2) + C_2 \sin(kL/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -C_2 \frac{\sin(kL/2)}{\cos(kL/2)}. \quad (2.40)$$

Dvs.

$$\begin{aligned} \bar{G}I_z(z) &= -C_2 \frac{1}{\cos(kL/2)} [\sin(kL/2) \cos(kz) - \cos(kL/2) \sin(k|z|)] \\ &= -C_2 \frac{1}{\cos(kL/2)} \sin(k(L/2 - |z|)). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Løses (2.41) med hensyn til strømmen I_z fås

$$I_z(z) = I_z(0) \frac{\sin(k(L/2 - |z|))}{\sin(kL/2)}, \quad I_z(0) = -\frac{C_2 \sin(kL/2)}{\bar{G} \cos(kL/2)} \quad (2.42)$$

hvor $I_z(0)$ er inputstrømmen i punktet $z = 0$.

Udtrykket (2.42) viser at strømmen i en dipol antenne tilnærmelsesvis kan approksimeres til en sinusfunktion. Eksperimenter har imidlertid vist at *sinus-approksimationen* kun er korrekt for dipol antenner med en diameter d , som opfylder $d < 0.01\lambda$ [22], hvor λ angiver bølgelængden af signalet. For antenner med en større diameter er det derfor nødvendigt at løse *Hallén's* eller *Pocklington's* ligning for at bestemme strømmen.

2.6 Asymptotisk opførsel af *Hallén's* integralligning

Vi ønsker at bestemme en numerisk løsning til *Hallén's* integralligning. Men kigger vi imidlertid lidt nærmere på *Hallén's* ligning, fremgår det ikke umiddelbart som et trivielt problem at bestemme en numerisk løsning.

Lad os betegne kernen i (2.34) $G(z, z')$, da ses det at $G(z, z')$ er en forholdsvis pæn og skikkelig funktion. Anderledes er det med højresiden af (2.34). Her indgår leddet $C_2 \sin(k|z|)$, som har diskontinuitet i punktet $z = 0$. Rent intuitivt virker det modstridende at integrere, en i forvejen pæn og integrabel funktion, $G(z, z')$, for derefter at få en funktion (højresiden i (2.34)) der er diskontinuert. Det er velkendt at integraloperatoren har en "udglattende" effekt på funktioner, men det synes ikke at være tilfældet her. For at dette skal være opfyldt, kræver det imidlertid at $I_z(z')$ ikke er en integrabel funktion. Vi skal i det følgende se at det faktisk er tilfældet.

Vi har at

$$\int_{-h}^h I(z')K(z - z', a)dz' = \frac{i C_2}{\eta} \frac{\sin(k|z|)}{2} + C_1 \cos(kz) \quad (2.43)$$

hvor $i = \sqrt{-1}$ angiver den imaginære enhed. Kernen er givet ved

$$K(z, a) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik\sqrt{z^2+a^2}}}{\sqrt{z^2+a^2}}. \quad (2.44)$$

Ligning (2.43) kan ikke have nogen analytisk løsning, hvis $C_2 \neq 0$. Eller mere præcist, hvis $I(z)$ er integrabel - dvs. hvis integralet

$$\int_{-h}^h |I(z)| dz \quad (2.45)$$

eksisterer.

Årsagen til (2.43) ikke har nogen løsning, er groft sagt følgende. Som det fremgår af (2.44) er $K(z, a)$ en analytisk funktion af z , når z er reel. Derfor er venstresiden af (2.43) analytisk når z er reel, mens højresiden har en diskontinuert differentialkvotient. Et formelt bevis herfor er i følge [1] givet ved:

For $z \geq h$ defineres

$$\alpha(z) = \int_{-h}^h I(z')K(z - z', a) dz' \quad (2.46)$$

samt følgende *Fourier* transformationer

$$\bar{I}(\zeta) = \int_{-h}^h I(z)e^{i\zeta z} dz \quad (2.47)$$

$$\bar{K}(\zeta, a) = \int_{-\infty}^{\infty} K(z, a)e^{i\zeta z} dz \quad (2.48)$$

$$\bar{V}(\zeta) = \int_{-h}^h \left(\frac{i C_2}{\eta} \frac{\sin(k|z|)}{2} + C_1 \cos(kz) \right) e^{i\zeta z} dz \quad (2.49)$$

$$\bar{\alpha}(\zeta) = \int_h^{\infty} \alpha(z)e^{i\zeta z} dz. \quad (2.50)$$

Da følger det af (2.43) og (2.46) samt reelle værdier af ζ , at

$$\bar{I}(\zeta)\bar{K}(\zeta, a) = \bar{V}(\zeta) + \bar{\alpha}(\zeta) + \bar{\alpha}(-\zeta). \quad (2.51)$$

Af (2.45) og (2.46) fås

$$|\alpha(z)| \leq \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{(z-h)^2 + a^2}} \int_{-h}^h |I(z)| dz \quad (2.52)$$

$$|\alpha'(z)| \leq \frac{1}{4\pi} \frac{\sqrt{1 + k^2(z-h)^2 + k^2 a^2}}{(z-h)^2 + a^2} \int_{-h}^h |I(z)| dz. \quad (2.53)$$

Ved partiel integration fås

$$\bar{\alpha}(\zeta) = e^{ik\zeta} (i\alpha(h)\zeta^{-1} - \alpha'(h)\zeta^{-2} + O(\zeta^{-3})) \quad (2.54)$$

og

$$\bar{\alpha}(-\zeta) = -e^{-ik\zeta} (i\alpha(h)\zeta^{-1} + \alpha'(h)\zeta^{-2} + O(\zeta^{-3})) \quad (2.55)$$

for $\zeta \rightarrow \infty$. Det gælder yderligere, at

$$\begin{aligned} \bar{V}(\zeta) &= \left(\frac{i C_2}{\eta} \frac{1}{2} \sin(kh) + 2C_1 \cos(kh) \sin(k\zeta) \right) \zeta^{-1} \\ &+ \left(k \left(\frac{i C_2}{\eta} \frac{1}{2} \cos(kh) - 2C_1 \sin(kh) \right) \cos(k\zeta) - k \frac{i C_2}{\eta} \frac{1}{2} \right) \zeta^{-2} + O(\zeta^{-3}). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Ligningerne (2.54)-(2.56) angiver den asymptotiske opførsel af højresiden i (2.51). Dette kan anskueliggøres tydeligere. Fra (2.46) fås

$$\alpha(h) = \frac{i C_2}{\eta} \frac{1}{2} \sin(kh) + C_1 \cos(kh) \quad (2.57)$$

og

$$\alpha'(h) = k \left(\frac{i C_2}{\eta} \frac{1}{2} \cos(kh) - C_1 \sin(kh) \right). \quad (2.58)$$

For $\zeta \rightarrow \infty$ fås

$$\bar{V}(\zeta) + \bar{\alpha}(\zeta) + \bar{\alpha}(-\zeta) = -k \frac{i C_2}{\eta} \zeta^{-2} (1 + O(\zeta^{-1})). \quad (2.59)$$

På den anden side, er $\bar{I}(\zeta)$ bundet pga. betingelsen i (2.45). Den asymptotiske opførsel af kernen $\bar{K}(\zeta, a)$ er givet ved

$$\bar{K}(\zeta, a) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi\zeta a}} e^{-\zeta a} (1 + O(\zeta^{-1})). \quad (2.60)$$

For $\zeta \rightarrow \infty$.

Af (2.59) fremgår det at venstresiden af (2.51) aftager eksponentiel - altså $e^{-\zeta a}$ for $\zeta \rightarrow \infty$, mens højresiden kun nærmer sig nul med ζ^{-2} . Det betyder at (2.51) ikke er opfyldt, hvilket medfører at (2.43) ikke har nogen integrabel analytisk løsning.

2.7 Delkonklusion

Der er blevet etableret en overordnet matematisk model for den *linære cylindriske dipol antenne*. Modellen fokuserer på to forskellige måder, hvorpå den spændingskilde, der driver dipol antennen kan repræsenteres. Den første er den såkaldte *Delta-gap* metode, hvor antennen deles på midten og der tilsluttes en spændingsgenerator, hvis poler kobles til hver af de ledende cylindre. Den anden er den såkaldte *Magnetic frill generator*, som modellerer spændingskilden vha. et magnetfelt. Eftersom Delta-gap modellen er den simpleste af de to, baserer de efterfølgende beregninger sig på denne model.

Derudover er der blevet udledt to klassiske integralligninger i forbindelse med antenne-teori - henholdsvis *Hallén's* og *Pocklington's* integralligninger. Begge ligninger udtrykker forholdet mellem strømmen i en dipol antenne, og det eksterne elektriske felt der virker på antennen.

Endelig er det blevet bevist at der ikke eksisterer nogen analytisk løsning af *Hallén's* ligning. I de følgende kapitler gennemgås forskellige numeriske metoder til løsning af integralligninger generelt. Enkelte metoder vil blive implementeret og anvendt på *Hallén's* integralligning.

Kapitel 3

Integralligninger

Da *Hallén's* integralligning og *Pocklington's* integralligning blev udledt, søgte man ganske naturligt analytiske løsninger. Selv efter det blev bevist, at der ikke eksisterede analytiske løsninger til nogen af ligningerne, var interessen for dem stor. Og interessen for disse ligninger er ikke forsvundet. På trods af at det oprindelige problem blev formuleret i slutningen af forrige århundrede, samt at man nu er klar over at der ikke findes analytiske løsninger, bliver der stadig publiceret en stor mængde artikler om *numeriske* løsninger af *Hallén's* og *Pocklington's* integralligninger. En vigtig årsag til den stadig eksisterende interesse for disse ligninger, er at mange af de velkendte numeriske metoder fører til ustabile resultater. Derfor er det af stor interesse at finde metoder, som ikke har denne negative effekt.

Dette kapitel omhandler integralligninger. Kapitlet begrænses til at behandle *Fredholm* integralligninger - dvs. *Fredholm integralligninger af 1. art* samt *Fredholm integralligninger af 2. art*.

3.1 Fredholm integralligninger af 1. art

I kapitel 2 blev *Fredholm integralligninger af 1. art* introduceret ganske kort. Nemlig

$$\int_a^b K(x, y)f(y) dy = g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (3.1)$$

hvor $K(x, y)$ er integraloperatorens *kerne* og højresiden $g(x)$ angiver en kendt funktion. Funktionen $f(y)$ angiver den ukendte funktion, som ønskes bestemt ved løsning af (3.1). I mange, men langt fra alle praktiske problemstillinger, er kernen $K(x, y)$ bestemt ud fra den underliggende matematiske model - hvilket præcist er tilfældet for *Hallén's* og *Pocklington's* integralligninger. Derimod kendes højresiden $g(x)$ ofte ikke eksakt, men kun ud fra målte størrelser. Dvs. funktionen g antages at være kendt, men inden for en vis usikkerhed og kun i en endelig mængde diskrete punkter x_1, \dots, x_m . I vores problemstilling er højresiden i (3.1) imidlertid kendt, hvilket de efterfølgende beregninger baserer sig på.

Fredholm integralligninger af 1. art, der modellerer den fysiske verden kan sjældent løses analytisk. Som det var tilfældet med *Hallén's* integralligning, kan man i nogle tilfælde bevise at der ikke eksisterer en analytisk løsning. Det betyder imidlertid ikke at de problemer der ligger til grund for integralligningerne er uløselige, men nærmere at man anvender *approksimative* eller *numeriske* løsninger.

En måde hvorpå en numerisk løsning til (3.1) kan bestemmes, er ved at indføre en *kvadraturformel* på intervallet $[a, b]$. Derved fås

$$\int_a^b K(x, y)f(y) dy \approx \sum_{j=1}^n w_j K(x, y_j)f(y_j). \quad (3.2)$$

De ubekendte er nu f 's værdier i interpolationspunkterne, eller rettere en approksimation hertil. Dvs.

$$f_i \approx f(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Det diskrete problem bliver et system af N lineære ligninger i N ubekendte. Dvs.

$$\sum_{j=1}^n w_j K(x_i, y_j)f_j = g(x_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

hvor f_j er den ukendte funktion. Skrives (3.4) på matrixform fås

$$\begin{pmatrix} w_1 K(x_1, y_1) & w_2 K(x_1, y_2) & \dots & w_n K(x_1, y_n) \\ w_1 K(x_2, y_1) & w_2 K(x_2, y_2) & \dots & w_n K(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_1 K(x_n, y_1) & w_2 K(x_n, y_2) & \dots & w_n K(x_n, y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

eller

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}. \quad (3.6)$$

Hvis $K(x, y)$ og $g(x)$ er reelle funktioner, gælder det at $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ samt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, hvor

$$\left. \begin{array}{l} a_{ij} = w_j K(x_i, y_j) \\ x_j = f_j \\ b_i = g(x_i) \end{array} \right\} \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (3.7)$$

Dermed kan løsningen til (3.1) formuleres som det *inverse* problem

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (3.8)$$

Det skal understreges at det på ingen måde er hensigtsmæssigt, at bestemme den inverse koefficientmatrix i en praktisk problemstilling, dvs. at beregne \mathbf{A}^{-1} . Istedet bør man bruge en numerisk metode til løsning af (3.6). Eksempler er *Gauss elimination*, *LU faktorisering*, *QR faktorisering*, *Cholesky faktorisering* etc.

Betragtes den diskrete form (3.4) af integralligningen (3.1), ses det at hvis kernen $K(x, y)$ varierer langsomt bliver søjlerne i koefficientmatricen i ligningssystemet (3.6) næsten lineært afhængige. Dermed får koefficientmatricen fuld rank, hvilket betyder at ligningssystemet (3.6) bliver dårligt konditioneret. At ligningssystemet (3.6) bliver dårligt konditioneret gør at relative små ændringer eller *perturbationer* af elementerne i koefficientmatricen \mathbf{A} , forårsager store ændringer i løsning af $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Dette har den ubehagelige konsekvens, at de tidligere omtalte numeriske metoder til løsning af (3.6) producerer ubrugelige resultater. Dette fænomen er udpræget for diskretisering af (3.1), og den primære årsag til at netop *Fredholm integralligninger af 1. art* betegnes ¹*ill-posed problems*.

¹I resten af rapporten vil det eng. betegnelse *ill-posed problem* blive brugt, om diskretisering af *Fredholm integralligninger af 1. art*.

At *Fredholm integralligninger af 1. art* har denne ubekvemme tendes til at give et diskret system, som ofte er *ill-posed*, betyder at man skal være påpasselig, dels med de metoder som benyttes til diskretisering af (3.1), og dels med de metoder som benyttes til løsning af (3.6). Desværre findes der ikke en entydig og generel diskretiseringsmetode, som garanterer et velkonditioneret ligningssystem - det afhænger i høj grad af udseendet af (3.1), dvs. skikkeligheden af kernen $K(x, y)$ og højresiden $g(x)$. Ligeledes er det problematisk at generalisere med hensyn til hvilke metoder, der skal anvendes til løsning af ligningssystemet (3.6), uden forudgående kendskab til udseendet af (3.1). Derfor er det i praktiske problemstillinger, ofte nødvendigt at eksperimentere med forskellige *diskretiseringsalgoritmer* samt med forskellige numeriske metoder til løsning af ligningssystemet - for derefter ved systematisk sammenligning af de pågældende metoder, at afgøre hvilke der giver de bedste resultater.

3.2 Fredholm integralligninger af 2. art

Selv om teorien for løsning og numerisk løsning af *Fredholm integralligninger af 1. art* er veletableret, fokuserer mange lærebøger primært på løsning af *Fredholm integralligninger af 2. art*. I det følgende gives en kort introduktion til principperne involveret i numerisk løsning af *Fredholm integralligninger af 2. art*.

En *Fredholm integralligning af 2. art* er givet ved

$$f(x) = g(x) + \int_a^b K(x, y)f(y) dy \quad (3.9)$$

hvor f er den ukendte funktion og $K(x, y)$ er integraloperatorens kerne, der ligesom tidligere, antages at være kendt. En mulig diskretisering af (3.9) fås ved at indføre en *kvadraturformel* på intervallet $[a, b]$. Det giver

$$\int_a^b K(x, y)f(y) dy \approx \sum_{j=1}^n w_j K(x, y_j)f(y_j). \quad (3.10)$$

De ubekendte er nu f 's værdier i interpolationspunkterne, eller rettere en approksimation hertil. Dvs.

$$f_i \approx f(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.11)$$

Det diskrete problem bliver derfor

$$f_i = \sum_{j=1}^n w_j K(x_i, y_j)f_j + g(x_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.12)$$

(3.12) er et system af n lineære ligninger i n variable, et problem, som kan løses vha. forskellige numeriske metoder. Se f.eks. [5]. Af indlysende grunde ønsker man at holde n så lille som muligt. Derfor er det vigtigt at bruge en god kvadraturformel, således der opnås en god nøjagtighed. For en mere detaljeret behandling af *Fredholm integralligninger af 2. art* henvises til [4], [16] og [17]

3.3 Betingelser for løsning af Fredholm integralligninger af 1. art

I dette afsnit introduceres forskellige analytiske værktøjer til analyse af *Fredholm integralligninger af 1. art*.

3.3.1 Singulær værdi udvikling

Et nyttigt værktøj til analyse af *Fredholm integralligninger af 1. art*, er ²*Singulær værdi udvikling* af integralkernen K . Vi vil i det følgende se, hvorledes SVE kan bruges til at fastsætte betingelser for løsning af *Fredholm integralligninger af 1. art*.

Vi ønsker at bestemme en løsning til integralligningen

$$\int_a^b K(x, y) f(y) dy = g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad (3.13)$$

eller skrevet på formen

$$Lf = g, \quad (3.14)$$

hvor L er en lineær integraloperator, g er en kendt funktion og f er den ukendte funktion, som ønskes bestemt. Lad $K \in L^2([a, b] \times [a, b])$ samt relationen

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < \infty \quad (3.15)$$

være opfyldt. Så defineres

$$Lf = \int_a^b K(x, y) f(y) dy, \quad f \in L^2(a, b), \quad (3.16)$$

og

$$L^* f = \int_a^b K(x, y) f(y) dx, \quad f \in L^2(a, b). \quad (3.17)$$

Eftersom funktionen g i (3.14) er kendt, giver en vilkårlig operator T anvendt på g en kendt funktion - dvs. $h = Tg$. Men da $Tg = T(Lf) = TLf$ fås $h = TLf$, hvor h og operatoren TL er kendte, mens f ønskes bestemt. Vælges operatoren, som $T = L^*$ fås $h = TLf = L^*Lf$. Dvs.

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_a^b K(x, z) g(x) dx \\ &= \int_a^b K(x, z) dx \int_a^b K(x, y) f(y) dy \\ &= \int_a^b f(y) \left[\int_a^b K(x, z) K(x, y) dx \right] dy. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Altså gælder det at

$$L^*Lf = \int_a^b f(y) \left[\int_a^b K(x, z) K(x, y) dx \right] dy. \quad (3.19)$$

Det gælder, at $N_{L^*L} = R_{(L^*L)^*} = R_{L^*L}$. Dermed er L^*L *bijektiv* på R_{L^*L} . Her betegner N nulrummet og R rangen. Det gælder ifølge [13], at

$$L^*Lv_i = \mu_i^2 v_i \quad (3.20)$$

samt

$$u_i = \frac{1}{\mu_i} Lv_i, \quad (3.21)$$

²Eng. *Singular value expansion* SVE.

hvor funktionerne v_i og u_i kaldes *singulære funktioner* til L og μ_i kaldes *singulære værdier* til L . Det gælder desuden, at

$$L^*u_i = \frac{1}{\mu_i}L^*Lv_i = \mu_iv_i. \quad (3.22)$$

Til operatoren L hører altså funktionerne u_i og v_i . Der gælder følgende sammenhæng mellem disse funktioner

$$Lv_i = \mu_iu_i, \quad L^*u_i = \mu_iv_i. \quad (3.23)$$

Ved hjælp af de *singulære funktioner* samt de *singulære værdier*, kan integralkernen K , ifølge [10] skrives som summen

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i u_i(x) v_i(y). \quad (3.24)$$

Funktionerne u_i og v_i er ortonormale mht. til det indre produkt - dvs. $(u_i, u_j) = (v_i, v_j)$, hvor $(,)$ er defineret ved

$$(\phi, \psi) \equiv \int \phi(y)\psi(y) dy. \quad (3.25)$$

De *singulære værdier* μ_i for K er positive, og kan altid ordnes således

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots \geq 0. \quad (3.26)$$

En vigtig sammenhæng mellem de *singulære funktioner* og de *singulære værdier* er udtrykt i ligningen

$$\int_a^b K(x, y)v_i(y) dy = \mu_iu_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, \quad (3.27)$$

som viser at enhver singulære vektor u_i mappes over i den tilhørende vektor v_i . Yderligere virker μ_i , som en forstærkning af denne mapping. Indsættes (3.27) og (3.24) i integralligningen (3.13), fås ligningen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(v_i, f)u_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (u_i, g)u_i(x), \quad (3.28)$$

som giver anledning til løsningen af (3.13), nemlig

$$f(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(u_i, g)}{\mu_i} v_i(y). \quad (3.29)$$

Betingelsen for at f eksisterer, er at højresiden i (3.29) konvergerer. Af (3.29) ses det at f er udtrykt ved de *singulære funktioner* v_i samt koefficienterne $(u_i, g)/\mu_i$. Løsningen f kan derfor findes, ved at analysere koefficienterne $(u_i, g)/\mu_i$ samt funktionerne v_i .

3.3.2 Picard betingelsen

Af afsnit 3.3.1 fremgår det, at en hvilken som helst højreside g i (3.13), ikke giver en pæn integrabel løsning f . Faktisk skal højresiden g være pænere end den ønskede løsning, for at sikre at (3.29) konvergerer til løsningen f . Dette er formuleret i den såkaldte *Picard betingelse*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{(u_i, g)}{\mu_i} \right)^2 < \infty. \quad (3.30)$$

Picard betingelsen udtrykker, for et bestemt sted i summen, at den absolutte værdi af koefficienterne (u_i, g) skal aftage hurtigere end den tilhørende *singulære værdi* μ_i , for at der findes en integrabel løsning f til (3.13).

3.3.3 Singulær værdi dekomposition

Eftersom *Fredholm integralligninger af 1. art* ofte løses numerisk vha. diskretisering, kan man ikke direkte anvende metoderne beskrevet i afsnit 3.3.1 og 3.3.2. Istedet analyseres det diskrete system vha. ³*Singulær værdi dekomposition*, der kan betragtes som en diskret udgave af SVE. En sammenligning af SVE og SVD findes i [10].

SVD af en $m \times n$ matrix \mathbf{A} er givet ved

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T, \quad (3.31)$$

hvor de singulære vektorer \mathbf{u}_i og \mathbf{v}_i er ortonormale - dvs. $\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j$, og hvor σ_i angiver de *singulære værdier* for matricen \mathbf{A} . De singulære værdier opfylder

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0. \quad (3.32)$$

Med analogi til ligning (3.27) for SVE, gælder der for SVD

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i \quad i = 1, \dots, \min(m, n), \quad (3.33)$$

der viser at enhver vektor \mathbf{v}_i mappes over i den tilhørende vektor \mathbf{u}_i med σ_i , som forstærkning. Yderligere information om SVD, findes i [14].

3.3.4 Regulering

Som tidligere nævnt, giver diskretisering af *Fredholm integralligninger af 1. art* ofte anledning til diskrete systemer, som er *ill-posed*. Lad

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.34)$$

være det lineære ligningssystem, som opstår ved diskretisering af en *Fredholm integralligning af 1. art*. Systemet (3.34) siges at være *ill-posed*, såfremt det opfylder disse to kriterier

1. De singulære værdier for \mathbf{A} aftager gradvist mod nul.
2. Forholdet mellem den største og den mindste af de singulære værdier er stort.

Den primære grund til at det diskrete *ill-posed* problem (3.34), giver problemer for standard numeriske metoder, er at systemet faktisk er underbestemt. Forstået på den måde, at mange af de singulære værdier for \mathbf{A} er meget små. Derfor er det ofte nødvendigt at indkorporere yderligere information omkring den ønskede løsning, således systemet bliver numerisk stabilt. Dette kaldes *regulering*.

En meget brugt metode til regulering af diskrete systemer der er *ill-posed*, er at kræve at 2-normen til løsningen er lille. I regulering angiver man ofte et startestimat \mathbf{x}^* for løsningen. Derved fås en sidebetingelse, som udtrykker mimimering af størrelsen

$$\Omega(\mathbf{x}) = \|\mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\|_2. \quad (3.35)$$

Matricen \mathbf{L} i (3.35) vælges ofte, som identitetsmatricen \mathbf{I} .

Når sidebetingelsen (3.35) indføres, opgiver man at $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Istedet ønskes en fair balance mellem minimering af $\Omega(\mathbf{x})$ og minimering af *residual* normen $\|\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$. Ideen er, at den

³Eng. *singular value decomposition* SVD.

regulerede løsning, med lille norm og tilsvarende lille residual norm, ikke er langt fra den ukendte løsning til det upertuberede problem.

Den mest almindelige form for regulering er den såkaldte *Tikhonov regulering* [10]-[11]. Her defineres den regulerede løsning \mathbf{x}_λ ved

$$\mathbf{x}_\lambda = \operatorname{argmin} \left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 + \lambda^2 \|\mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)\|_2^2 \right\}, \quad (3.36)$$

hvor λ , kaldt *reguleringsparameteren*, styrer vægten i forhold til minimering af sidebetingelsen og minimering af residual normen. En stor λ -værdi (svarende til meget regulering), favoriserer en løsning med lille norm, på bekostning af en stor residual norm. Omvendt har en lille λ -værdi (svarende til lidt regulering) den modsatte effekt. For metoder til regulering samt numerisk metoder til bestemmelse af λ henvises til [10] og [11].

3.3.5 Den diskrete Picard betingelse

I dette afsnit antager vi, at integralligningen (3.13) er blevet diskretiseret til systemet

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (3.37)$$

hvor $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ samt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$. I praktiske problemstillinger indeholder højresiden, \mathbf{b} , i (3.37) ofte forskellige former for fejl - eksempelvis målefejl, approksimationsfejl eller afrundingsfejl. En måde at tage højde for disse usikkerheder, er ved at angive \mathbf{b} som

$$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} + \mathbf{e}, \quad (3.38)$$

hvor \mathbf{e} angiver fejlene og $\bar{\mathbf{b}}$ angiver den *upertuberede* højreside - altså den oprindelige højreside. Både $\bar{\mathbf{b}}$ og den tilsvarende upertuberede løsning $\bar{\mathbf{x}}$ repræsenterer det underliggende upertuberede problem. Ønsker man at bestemme en reguleret løsning \mathbf{x}_{reg} fra den upertuberede højreside \mathbf{b} , således at \mathbf{x}_{reg} approksimerer den eksakte løsning $\bar{\mathbf{x}}$, er det vist af P. C. Hansen [12], at den oprindelige højreside $\bar{\mathbf{b}}$ skal opfylde et kriterie svarende til *Picard betingelsen* fra afsnit 3.3.2. Kriteriet er den såkaldte *diskrete Picard betingelse*.

Den diskrete Picard betingelse. Den upertuberede højreside $\bar{\mathbf{b}}$ i et diskret ill-posed system med reguleringsmatrix \mathbf{L} , opfylder den diskrete Picard betingelse, hvis Fourier koefficienterne $|\mathbf{u}_i^T \bar{\mathbf{b}}|$ i gennemsnit går mod nul hurtigere end de generaliserede singulære værdier γ_i .

Hvis det gælder at reguleringsmatricen \mathbf{L} , vælges svarende til identitetsmatricen \mathbf{I} - altså at $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ - så erstattes de generaliserede singulære værdier γ_i af de singulære værdier σ_i [11].

3.4 Delkonklusion

Vi har i dette kapitel set på generelle metoder til diskretisering af *Fredholm integralligninger af 1. art*. Desuden er det blevet konstateret, at det diskrete system svarende til disse integralligninger ofte er *ill-posed*, hvilket betyder at traditionelle numeriske metoder ikke kan bruges til løsning af det diskrete system. Derimod kan *regulering* i mange situationer anvendes på diskrete systemer som er *ill-posed*, derved fås en reguleret løsning som ligger tæt op af den eksakte løsning.

Desuden har vi stiftet bekendtskab med forskellige teknikker til analyse af integralligningerne. Nogle teknikker kan bruges direkte på integralligningerne i deres oprindelige form, mens andre er henvendt til analyse af de diskrete systemer.

Kapitel 4

Diskretisering

Vi har i de foregående kapitler behandlet *diskretisering* af integralligninger på et generelt teoretisk plan. Dette kapitel omhandler konkrete metoder til diskretisering af *Hallén's* integralligning (2.34). *Hallén's* integralligning skrives i det følgende som

$$\int_{-L/2}^{L/2} K(x, y) I(y) dy = D_1(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2] \quad (4.1)$$

hvor den ukendte funktion I angiver strømmen i dipol antennen, D_1 angiver det eksterne elektromagnetiske felt og K angiver *kernen*. Kernen $K(x, y)$ er givet ved

$$K(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{a^2+(x-y)^2}}}{\sqrt{a^2+(x-y)^2}} \quad (4.2)$$

hvor $k = 2\pi$ er fasekonstanten, a angiver antennens radius og $i = \sqrt{-1}$ er den imaginære enhed. Det eksterne felt D_1 er givet ved

$$D_1(x) = -\frac{i}{\eta} \left(C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(k|x|) \right), \quad (4.3)$$

hvor $\eta = \eta_0 \simeq 120\pi$ er den karakteristiske impedans i vakuum, C_1 er *Hallén's* konstant og C_2 er halvdelen af terminalspændingen. Dermed kan (4.1) skrives

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{a^2+(x-y)^2}}}{\sqrt{a^2+(x-y)^2}} I(y) dy = -\frac{i}{\eta} \left(C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(k|x|) \right). \quad (4.4)$$

Bemærk at (4.4) indeholder den *reducerede* kerne svarende til (2.28). Dermed er (4.4) identisk med (2.34) bortset fra notationen, som er ændret af bekvemmelige grunde.

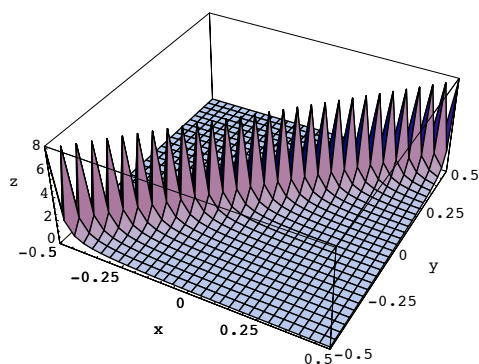
4.1 Visualisering af funktioner i *Hallén's* integralligning

Inden vi foretager en diskretisering af (4.1) visualiseres de funktioner, som er involveret i *Hallén's* ligning.

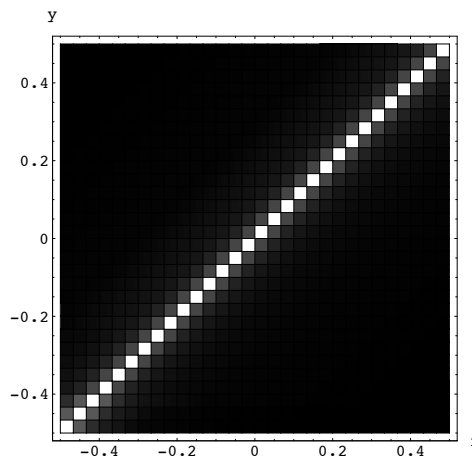
4.1.1 Visualisering af kernen

Kernen $K(x, y)$ i *Hallén's* integralligning er symmetrisk - dvs. $K(x, y) = K(y, x)$. At kernen er symmetrisk er normalt en positiv egenskab, idet symmetrien i nogle tilfælde overføres til koefficientmatricen i ligningssystemet. En symmetrisk koefficientmatrix er attraktiv set ud fra et numerisk synspunkt, eftersom løsning af ligningssystemet dermed bliver væsentligt lettere at håndtere. Om symmetri i integralkernen medfører symmetri i koefficientmatricen for det diskrete system, afhænger i høj grad af hvilken diskretiseringsmetode der anvendes.

Betragtes kernen $K(x, y)$ i (4.2) ses det at $K : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ - altså er kernen K en kompleks funktion. Yderligere er kernens koncentration domineret langs linien $x = y$. Figur 4.1 viser et tredimensionelt plot af kernen $K(x, y)$.



Figur 4.1: Tredimensionelt plot af den absolutte værdi af kernen $K(x, y)$ i *Hallén's* integralligning.

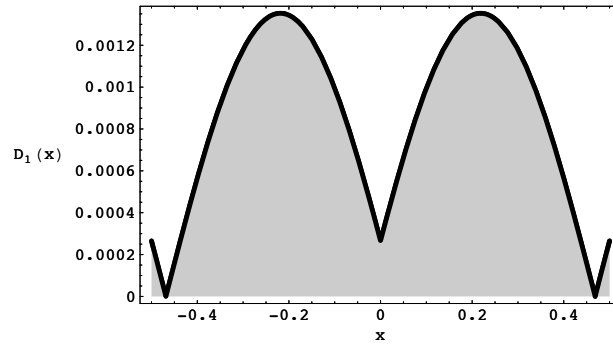


Figur 4.2: Densitetsplot af den absolutte værdi af kernen $K(x, y)$ i *Hallén's* integralligning.

Som det fremgår af figur 4.1, og endnu tydeligere af figur 4.2, er kernen $K(x, y)$ i *Hallén's* ligning stærkt domineret langs linien $x = y$. Dette stiller imidlertid krav til de numeriske metoder, som skal integrere $K(x, y)$, idet intervalinddelingen dermed skal være meget lille for at opnå en tilfredsstillende nøjagtighed. Det betyder derimod at integrationen kræver mange iterationer, hvilket ikke er ønskeligt.

4.1.2 Visualisering af højresiden

På figur 4.3 ses højresiden $D_1(x)$ i *Hallén's* integralligning. Som det fremgår er højresiden $D_1(x)$ diskontinuert i punktet $x = 0$. Denne diskontinuitet overføres til den diskrete form af *Hallén's* ligning.



Figur 4.3: Plot af den absolutte værdi af højresiden $D_1(x)$ i Hallén's integralligning.

4.2 Trapez metoden

Vi benytter *trapez metoden* [5] til diskretisering af (4.1). For *trapez metoden* gælder det at

$$h = (b - a)/n, \quad (4.5)$$

$$x_i = a + ih, \quad (4.6)$$

$$y_j = a + jh. \quad (4.7)$$

Den diskrete form af (4.1) bliver da

$$h \left(\frac{1}{2} K(x_i, y_0) u_0 + \sum_{j=1}^n K(x_i, y_j) u_j + \frac{1}{2} K(x_i, y_n) u_n \right) = D_1(x_i), \quad i = 0, \dots, n. \quad (4.8)$$

De ubekendte er nu u 's værdier i interpolationspunkterne, eller rettere en approksimation hertil. Dvs. vi har indført approksimationen

$$u_j \approx I(y_j), \quad j = 0, \dots, n. \quad (4.9)$$

Skrives (4.8) på matrixform fås et system af $n + 1$ lineære ligninger i $n + 1$ ubekendte

$$h \begin{pmatrix} \frac{1}{2} K(x_0, y_0) & K(x_0, y_1) & K(x_0, y_2) & \dots & \frac{1}{2} K(x_0, y_n) \\ \frac{1}{2} K(x_1, y_0) & K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) & \dots & \frac{1}{2} K(x_1, y_n) \\ \frac{1}{2} K(x_2, y_0) & K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) & \dots & \frac{1}{2} K(x_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} K(x_n, y_0) & K(x_n, y_1) & K(x_n, y_2) & \dots & \frac{1}{2} K(x_n, y_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1(x_0) \\ D_1(x_1) \\ D_1(x_2) \\ \vdots \\ D_1(x_n) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

eller

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{D}_1. \quad (4.11)$$

Da $K(x, y)$ og $D_1(x)$ er komplekse funktioner, gælder det at $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{(n+1) \times (n+1)}$, $\mathbf{D}_1 \in \mathbb{C}^{(n+1) \times 1}$ samt $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^{(n+1) \times 1}$.

En numerisk løsning af *Hallén's* integralligning med ¹ *trapez metoden*, kan nu bestemmes ved at implementere (4.8). Dermed opstilles ligningssystemet i (4.10). Løses dette system med hensyn til vektor \mathbf{u} , fås strømmen i antennen.

4.3 Produkt trapez metoden

Vi benytter *produkt trapez metoden* til diskretisering af (4.1). *Hallén's* ligning kan ifølge (4.1) skrives

$$\int_{-L/2}^{L/2} K(x, y)I(y) dy = D_1(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \quad (4.12)$$

hvor kernen $K(x, y)$ og højresiden $D_1(x)$ er defineret i henholdsvis (4.2) og (4.3). For at bruge *produkt trapez metoden* på (4.12), indføres integralligningen

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{f(x, y)}{\sqrt{a^2 + (x - y)^2}} u(y) dy = D_1(x) \quad \forall x \in [-L/2, L/2], \quad (4.13)$$

hvor den "pæne" del af kernen $K(x, y)$, er blevet erstattet af funktionen $f(x, y)$. Desuden gælder det, at $u(y) = I(y)$. Anvendes *produkt trapez metoden* på (4.13), gælder det at

$$h = \frac{L/2 - (-L/2)}{n} = \frac{L}{n} \quad (4.14)$$

samt

$$\left. \begin{array}{l} x_j = -L/2 + jh \\ x_{j-1} = x_j - h \end{array} \right\} \quad j = 0, \dots, n. \quad (4.15)$$

For $j = 1, \dots, n$ fås:

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{f(x, y)}{\sqrt{a^2 + (x - y)^2}} u(y) dy \approx \sum_{j=1}^n S_j(x), \quad (4.16)$$

hvor

$$S_j(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{c_j + d_j y}{\sqrt{a^2 + (x - y)^2}} dy, \quad (4.17)$$

hvor $c_j + d_j y$ er det 1. grads polynomium, som for fast værdi af x interpolerer funktionen $g(y) = u(y)f(x, y)$ i ligning (4.12). Interpolationen sker over punkterne x_{j-1} og x_j .

Lad $P_j(y)$ være det 1. grads polynomium, som opfylder

$$P_j(x_{j-1}) = g(x_{j-1}) \quad (4.18)$$

samt

$$P_j(x_j) = g(x_j). \quad (4.19)$$

Da defineres polynomiet $P_j(y)$ ved

$$P_j(y) = g(x_{j-1}) + \frac{g(x_j) - g(x_{j-1})}{h}(y - x_{j-1}) \quad (4.20)$$

¹Løsning af *Hallén's* integralligning med *trapez metoden* findes i filerne "hallenTrapez.m" (Matlab) samt "hallenTrapez_original.nb" (Mathematica). Se bilag E for indhold af CD.

Vi benytter relationen i (4.15) på udtrykket i (4.20), og får

$$\begin{aligned}
P_j(y) &= g(x_{j-1}) + \frac{g(x_j) - g(x_{j-1})}{h}(y - (x_j - h)) \\
&= g(x_{j-1}) + \frac{g(x_j) - g(x_{j-1})}{h}(y - x_j + h) \\
&= g(x_{j-1}) + \frac{g(x_j)(y - x_j + h) - g(x_{j-1})(y - x_j + h)}{h} \\
&= g(x_{j-1}) + \frac{g(x_j)y - g(x_j)x_j + g(x_j)h - g(x_{j-1})y + g(x_{j-1})x_j - g(x_{j-1})h}{h} \\
&= \frac{g(x_{j-1})h + g(x_j)y - g(x_j)x_j + g(x_j)h - g(x_{j-1})y + g(x_{j-1})x_j - g(x_{j-1})h}{h} \\
&= \frac{g(x_j)y - g(x_j)x_j + g(x_j)h - g(x_{j-1})y + g(x_{j-1})x_j}{h} \\
&= \frac{g(x_{j-1})x_j - g(x_j)x_j + g(x_j)h}{h} + \frac{g(x_j)y - g(x_{j-1})y}{h} \\
&= \frac{g(x_{j-1})x_j - g(x_j)x_j + g(x_j)h}{h} + \frac{g(x_j) - g(x_{j-1})}{h}y \\
&= \frac{x_j g(x_{j-1}) - (x_j - h)g(x_j)}{h} + \frac{g(x_j) - g(x_{j-1})}{h}y \\
&= \frac{x_j}{h}g(x_{j-1}) - \frac{(x_j - h)}{h}g(x_j) + \frac{g(x_j) - g(x_{j-1})}{h}y \\
&= \frac{x_j}{h}g(x_{j-1}) - \left(\frac{x_j}{h} - 1\right)g(x_j) + \frac{g(x_j) - g(x_{j-1})}{h}y.
\end{aligned}$$

Polynomiet $P_j(y)$ bliver derfor

$$P_j(y) = \frac{x_j}{h}g(x_{j-1}) - \left(\frac{x_j}{h} - 1\right)g(x_j) + \frac{1}{h}(g(x_j) - g(x_{j-1}))y. \quad (4.21)$$

Fra (4.21) defineres

$$c_j = \frac{x_j}{h}g(x_{j-1}) - \left(\frac{x_j}{h} - 1\right)g(x_j) \quad (4.22)$$

samt

$$d_j = \frac{1}{h}(g(x_j) - g(x_{j-1})). \quad (4.23)$$

For at benytte *produkt trapez metoden* er det en forudsætning, at (4.17) kan integreres eksakt. Integration af (4.17) er givet ved

$$\begin{aligned}
S_j(x) &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{c_j + d_j y}{\sqrt{a^2 + (x - y)^2}} dy \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\frac{c_j}{\sqrt{a^2 + (x - y)^2}} + \frac{d_j y}{\sqrt{a^2 + (x - y)^2}} \right) dy \\
&= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{c_j}{\sqrt{a^2 + (x - y)^2}} dy + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{d_j y}{\sqrt{a^2 + (x - y)^2}} dy \\
&= c_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{c_j}{\sqrt{a^2 + (x - y)^2}} dy + d_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{y}{\sqrt{a^2 + (x - y)^2}} dy \\
&= (c_j + x d_j) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y - x)^2}} dy + d_j \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{y - x}{\sqrt{a^2 + (y - x)^2}} d(y - x). \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Fra (4.24) defineres

$$i_1 = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{\sqrt{a^2 + (y-x)^2}} dy \quad (4.25)$$

samt

$$i_2 = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{y-x}{\sqrt{a^2 + (y-x)^2}} d(y-x). \quad (4.26)$$

Vi foretager substitutionen

$$\left. \begin{aligned} t &= y - x \\ \frac{dt}{dy} &= 1 \\ dt &= dy \\ \text{Grænsekift:} \\ a &= x_{j-1} \Leftrightarrow g(a) = x_{j-1} - x \\ b &= x_j \Leftrightarrow g(b) = x_j - x \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Dermed kan (4.25) skrives

$$i_1 = \int_{x_{j-1}-x}^{x_j-x} \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt. \quad (4.28)$$

Udtrykket i (4.28) kan integreres vha. invers substitution

$$\left. \begin{aligned} t &= a \tan(\theta) \\ \frac{dt}{d\theta} &= a \sec^2(\theta) \\ dt &= a \sec^2(\theta) d\theta \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{c} \triangle \\ \theta \\ a \end{array} \quad (4.29)$$

Dermed fås

$$\begin{aligned} i_1 &= \int_{x_{j-1}-x}^{x_j-x} \frac{r \sec^2(\theta)}{r \sec(\theta)} d\theta \\ &= \int_{x_{j-1}-x}^{x_j-x} \sec(\theta) d\theta \\ &= \left[\ln(\sec(\theta) + \tan(\theta)) \right]_{t=x_{j-1}-x}^{t=x_j-x} \\ &= \left[\ln\left(\frac{\sqrt{a^2 + t^2}}{a} + \frac{t}{a}\right) \right]_{t=x_{j-1}-x}^{t=x_j-x} \\ &= \left[\ln\left(\frac{t + \sqrt{a^2 + t^2}}{a}\right) \right]_{t=x_{j-1}-x}^{t=x_j-x} \\ &= \ln\left(\frac{x_j - x + \sqrt{a^2 + (x_j - x)^2}}{a}\right) - \ln\left(\frac{x_{j-1} - x + \sqrt{a^2 + (x_{j-1} - x)^2}}{a}\right) \\ &= \ln\left(\frac{x_j - x + \sqrt{a^2 + (x_j - x)^2}}{x_{j-1} - x + \sqrt{a^2 + (x_{j-1} - x)^2}}\right). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Anvendes substitutionen (4.27) på integralet i_2 fra ligning (4.26), fås

$$i_2 = \int_{x_{j-1}-x}^{x_j-x} \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt \quad (4.31)$$

Vi foretager substitutionen

$$\left. \begin{aligned} v &= a^2 - t^2 \\ \frac{dv}{dt} &= 2t \\ dv &= 2t dt \\ dt &= \frac{1}{2v} dy \\ \text{Grænseki\o{f}t :} \\ a &= x_{j-1} - x \Leftrightarrow g(a) = a^2 + (x_{j-1} - x)^2 \\ b &= x_j - x \Leftrightarrow g(b) = a^2 + (x_j - x)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Dvs.

$$\begin{aligned} i_2 &= \int_{v=a^2+(x_{j-1}-x)^2}^{v=a^2+(x_j-x)^2} \frac{t}{\sqrt{v}} \left(\frac{1}{2t} \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{v=a^2+(x_{j-1}-x)^2}^{v=a^2+(x_j-x)^2} \frac{1}{\sqrt{v}} dv \\ &= \frac{1}{2} \left[2\sqrt{v} \right]_{v=a^2+(x_{j-1}-x)^2}^{v=a^2+(x_j-x)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + (x_j - x)^2} - \sqrt{a^2 + (x_{j-1} - x)^2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Dermed er integralerne i_1 og i_2 givet ved

$$i_1(x_{j-1}, x_j, x) = \ln \left(\frac{x_j - x + \sqrt{a^2 + (x_j - x)^2}}{x_{j-1} - x + \sqrt{a^2 + (x_{j-1} - x)^2}} \right) \quad (4.34)$$

samt

$$i_2(x_{j-1}, x_j, x) = \sqrt{a^2 + (x_j - x)^2} - \sqrt{a^2 + (x_{j-1} - x)^2}. \quad (4.35)$$

Integralet $S_j(x)$ i ligning (4.24) bliver derfor

$$S_j = (c_j + d_j x) i_1(x_{j-1}, x_j, x) + d_j i_2(x_{j-1}, x_j, x), \quad (4.36)$$

som ved indsættelse af 4.22 og 4.23 bliver

$$\begin{aligned} S_j(x) &= \left(\frac{x_j}{h} g(x_{j-1}) - \left(\frac{x_j}{h} - 1 \right) g(x_j) + \frac{1}{h} \left(g(x_j) - g(x_{j-1}) \right) x \right) i_1 + \frac{1}{h} \left(g(x_j) - g(x_{j-1}) \right) i_2 \\ &= \left(\frac{x_j}{h} g(x_{j-1}) - \frac{x_j}{h} g(x_j) + g(x_j) + \frac{x}{h} g(x_j) - \frac{x}{h} g(x_{j-1}) \right) i_1 + \frac{1}{h} \left(g(x_j) - g(x_{j-1}) \right) i_2 \\ &= \frac{x_j}{h} g(x_{j-1}) i_1 - \frac{x_j}{h} g(x_j) i_1 + g(x_j) i_1 + \frac{x}{h} g(x_j) i_1 - \frac{x}{h} g(x_{j-1}) i_1 + \frac{1}{h} g(x_j) i_2 - \frac{1}{h} g(x_{j-1}) i_2 \\ &= (x_j - x) \frac{1}{h} g(x_{j-1}) i_1 - \frac{1}{h} g(x_{j-1}) i_2 - \frac{x_j}{h} g(x_j) i_1 + \frac{x}{h} g(x_j) i_1 + g(x_j) i_1 + \frac{1}{h} g(x_j) i_2 \\ &= (x_j - x) \frac{1}{h} g(x_{j-1}) i_1 - \frac{1}{h} g(x_{j-1}) i_2 - (x_j - x - h) \frac{1}{h} g(x_j) i_1 + \frac{1}{h} g(x_j) i_2 \\ &= \frac{1}{h} \left((x_j - x) i_1 g(x_{j-1}) - i_2 g(x_{j-1}) \right) - \frac{1}{h} \left((x_j - x - h) i_1 g(x_j) - i_2 g(x_j) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left((x_j - x) i_1 - i_2 \right) g(x_{j-1}) - \frac{1}{h} \left((x_j - x - h) i_1 - i_2 \right) g(x_j) \\ &= \frac{1}{h} \left((x_j - x) i_1 - i_2 \right) g(x_{j-1}) - \frac{1}{h} \left((x_{j-1} - x) i_1 - i_2 \right) g(x_j). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Altså fås følgende udtryk for $S_j(x)$, idet vi har udnyttet at $x_{j-1} = x_j - h$

$$S_j(x) = \frac{1}{h} \left((x_j - x)i_1 - i_2 \right) g(x_{j-1}) - \frac{1}{h} \left((x_{j-1} - x)i_1 - i_2 \right) g(x_j). \quad (4.38)$$

Den diskrete form af integralligningen er givet ved

$$\sum_{j=1}^n S_j(x) = D_1(x_i), \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (4.39)$$

Indsættes (4.38) i (4.39) fås

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{h} \left((x_j - x)i_1 - i_2 \right) g(x_{j-1}) - \frac{1}{h} \left((x_{j-1} - x)i_1 - i_2 \right) g(x_j) = D_1(x_i), \quad \forall i = 0, \dots, n. \quad (4.40)$$

Vi har tidligere, i forbindelse med interpolationen benyttet relationen $g(y) = u(y)f(x, y)$. I den diskrete form af integralligningen (4.40), erstattes $g(x_{j-1})$ og $g(x_j)$ derfor af henholdsvis $f(x_i, x_{j-1})u_{j-1}$ og $f(x_i, x_j)u_j$. Her har vi indført approksimationerne $u_{j-1} \approx u(x_{j-1})$ samt $u_j \approx u(x_j)$.

Dermed kan den diskrete form af *Hallén's* integralligning skrives

$$\frac{1}{h} \sum_{j=1}^n \left((x_j - x)i_1 - i_2 \right) f(x_i, x_{j-1})u_{j-1} - \left((x_{j-1} - x)i_1 - i_2 \right) f(x_i, x_j)u_j = D_1(x_i), \quad (4.41)$$

hvor $i = 0, \dots, n$.

En numerisk løsning af *Hallén's* integralligning med ²*produkt trapez metoden*, kan nu bestemmes ved at implementere (4.41). Dermed opstilles et lineært ligningssystem med $n+1$ ligninger i $n+1$ ubekendte. Løses dette system med hensyn til vektor \mathbf{u} , fås strømmen i antennen.

4.4 Bestemmelse af *Hallén's* konstant

Som nævnt tidligere kendes parameteren C_1 i *Hallén's integralligning* ikke på forhånd. Derimod skal parameteren C_1 , kaldt *Hallén's konstant*, bestemmes således at randbetingelsen $I(L/2) = 0$ er opfyldt. Randbetingelsen udtrykker at strømmen i enden af dipol antennen er nul, hvilket er en rimelig antagelse set ud fra en fysisk betragtning. Følgende randbetingelse er gældende

$$I\left(-\frac{L}{2}\right) = I\left(\frac{L}{2}\right) = 0. \quad (4.42)$$

Hallén's konstant C_1 kan bestemmes ved at opfatte $I(L/2)$, som en funktion af C_1 . Derfor defineres funktionen

$$\varphi(C_1) = I\left(\frac{L}{2}\right) \quad (4.43)$$

hvor I er løsningen svarende til C_1 . Det betyder at vi søger en numerisk løsning til ligningen

$$\varphi(C_1) = 0. \quad (4.44)$$

²Løsning af *Hallén's* integralligning med *produkt trapez metoden* findes i filerne "hallenProductTrapez.m" (Matlab) samt "hallenProductTrapez_original.nb" (Mathematica). Se bilag E for indhold af CD.

Det er vigtigt at bemærke at φ er en ukendt funktion, hvilket dog ikke betyder (4.44) ikke kan løses. *Hallén's* integralligning er *lineær*, idet funktionen $I(y)$ indgår lineært på venstresiden af (4.4). Desuden indgår *Hallén's konstant* C_1 lineært på højresiden af (4.4), derfor er (4.44) en lineær funktion.

Der findes mange forskellige numeriske metoder til løsning af ligninger i én variabel. Eksempler er *bisektionsmetoden*, *Newton's metode*, *sekantmetoden*, *Regular falsi*, *Muller's metode*, *Steffensen's metode* og forskellige fixpunktmetoder [5] og [23]. I dette tilfælde er det dog ikke ligegyldigt, hvilken metode der bruges, idet mange af de nævnte metoder kræver kendskab til den afledte af funktionen - dvs. $\varphi'(C_1)$. Vi kender ikke umiddelbart noget til funktionen $\varphi'(C_1)$ og har heller ikke umiddelbart mulighed for at bestemme den. Derfor vælges *sekantmetoden*, som gør brug af sekanten fremfor tangenten - og dermed den afledte.

Anvendes *sekantmetoden* på (4.44) fås

$$C_1^{(k+1)} = C_1^{(k)} - \frac{C_1^{(k)} - C_1^{(k-1)}}{\varphi(C_1^{(k)}) - \varphi(C_1^{(k-1)})} \varphi(C_1^{(k)}). \quad (4.45)$$

Som det fremgår af (4.45) indgår henholdsvis $C_1^{(k)}$ og $C_1^{(k-1)}$ på højresiden, dermed skal der specificeres to startgæt til *sekantmetoden*. *Hallén's konstant* er kompleks - dvs. $C_1 \in \mathbb{C}$. Spørgsmålet er derfor om det er underordnet, hvorledes de to startgæt vælges - altså om det har betydning om de vælges komplekse eller reelle. Lad os et øjeblik betragte det diskrete system af integral-ligningen, nemlig (4.10). Her indeholder koefficientmatricen, højresiden og løsningsvektoren alle komplekse elementer, hvilket betyder at $\varphi(C_1^{(k)})$ og $\varphi(C_1^{(k-1)})$ begge giver komplekse værdier. Da $\varphi(C_1^{(k)})$ og $\varphi(C_1^{(k-1)})$ begge indgår i nævneren i (4.45) er det uden betydning om $C_1^{(k)}$ og $C_1^{(k-1)}$ vælges komplekse eller reelle, idet resultatet af (4.45) altid vil antage en kompleks værdi.

Hallén's konstant kan derfor bestemmes ved at beregne (4.43) for de to startgæt $C_1^{(k)}$ og $C_1^{(k-1)}$. For hver beregning hentes det sidste element ud af løsningsvektoren, hvilket svarer til henholdsvis $\varphi(C_1^{(k)})$ og $\varphi(C_1^{(k-1)})$ i (4.45). Herefter udføres et *sekantskridt* og *Hallén's* konstant er bestemt. Randbetingelsen (4.42) opfyldes nu ved at anvende den netop beregnede konstant i løsning af *Hallen's* integralligning.

4.5 Delkonklusion

I dette kapitel har vi fundet diskrete udgaver af *Hallén's* integralligning. For *trapez metoden* er det diskrete system repræsenteret i (4.8), mens ligning (4.41) angiver det diskrete system fra *produkt trapez metoden*. I begge metoder anvendes *sekant metoden* til bestemmelse af *Hallén's* konstant.

Begge diskretiseringsmetoder er implementeret i *Mathematica* og *Matlab*. At der findes implementationer i to forskellige sprog, skyldes at undertegnede først blev bekendt med *Matlab pakken: "A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-posed Problems"* beskrevet i [11], efter at implementationen i *Mathematica* var lavet. Implementationerne giver naturligvis de samme resultater, men implementationen i *Matlab* gør brug af forskellige funktioner til analyse af de diskrete systemer.

Kapitel 5

Eksperiment med kvadratur

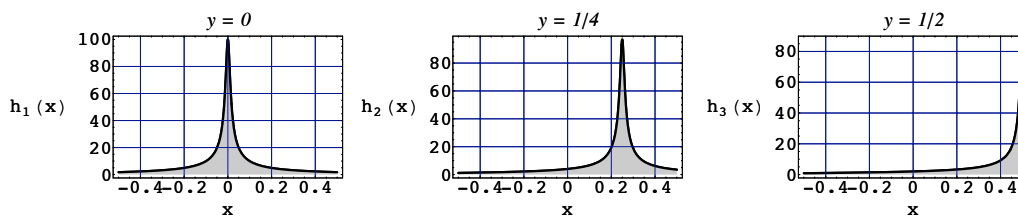
Inden de tidligere omtalte diskretiseringsmetoder bruges i løsningen af *Hallén's* integralligning, anvendes de til beregning af en række integraler. Dette gøres for at bestemme effektiviteten af de enkelte metoder. Dette kapitel præsenterer resultaterne af disse eksperimenter, og involverer derfor ikke *Hallén's* integralligning.

5.1 Definition af integraler

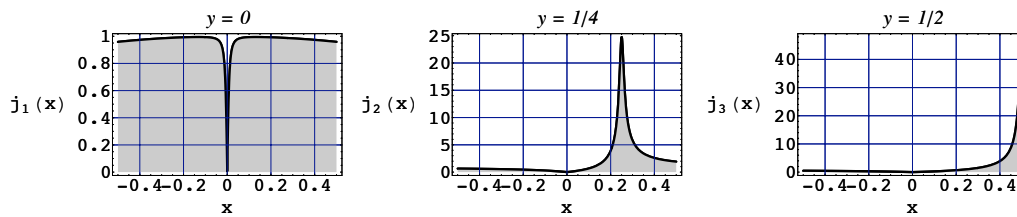
Følgende integraler ønskes bestemt

$$\left. \begin{aligned} h_i(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\cos(x)}{\sqrt{a^2+(x-y)^2}} dx \\ j_i(x) &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{\sin(|x|)}{\sqrt{a^2+(x-y)^2}} dx \end{aligned} \right\} a = 0.01, \quad i = \{1, 2, 3\}, \quad y = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\}. \quad (5.1)$$

Figur 5.1 og figur 5.2 viser plots for henholdsvis $h(x)$ og $j(x)$.



Figur 5.1: Plot af funktionerne $h_1(x)$, $h_2(x)$ og $h_3(x)$.



Figur 5.2: Plot af funktionerne $j_1(x)$, $j_2(x)$ og $j_3(x)$.

5.2 Trapez metoden

Integralerne i (5.1) er alle blevet approksimeret med *trapez metoden*. Til dette formål er der blevet udarbejdet en ¹*Mathematica package*, som implementerer *trapez metoden*. Dette afsnit præsenterer resultaterne af integralerne i (5.1), når disse beregnes med *trapez metoden*.

En approksimation til integralet

$$\int_a^b f(x) dx \quad (5.2)$$

er givet ved

$$S_n \approx \int_a^b f(x) dx \quad (5.3)$$

hvor

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n h \frac{1}{2} (f(y_{i-1}) + f(y_i)) \\ &= h \left(\frac{1}{2} f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(y_i) + \frac{1}{2} f(b) \right). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Ligning (5.4) kaldes *trapez metoden*, hvor

$$h = (b - a)/n \quad (5.5)$$

og

$$y_i = a + ih. \quad (5.6)$$

Hvis $f \in C^2([a, b])$ har *trapez metoden*, ifølge [5] følgende *fejlvurdering*:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - S(f) \right| \leq C(b - a) \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)| h^2. \quad (5.7)$$

Tabel 5.1 og tabel 5.2 angiver approksimationer af integralerne for henholdsvis $h(x)$ og $j(x)$ i ligning (5.1).

¹Trapez metoden er implementeret i filen "TrapezoidalMethod.nb", som findes på den vedlagte CD. Se bilag E for indhold af CD.

n	$S_n(h_1)$	$S_n(h_2)$	$S_n(h_3)$
2	50.8774070980	3.16778477629	23.1587487788
4	27.3749799904	26.2910622796	12.8704547126
8	16.2856835506	15.5788058807	8.02472171331
16	11.4070885434	10.8607487316	5.89623146697
32	9.58506349096	9.09765205067	5.10302995960
64	9.13102043529	8.65830028479	4.90645698778
128	9.08755475960	8.61633020108	4.88817786116
256	9.08702873272	8.61585663345	4.88812949048
512	9.08703712432	8.61587379195	4.88817691557
1024	9.08703925429	8.61587811272	4.88818869713

Tabel 5.1: Iterationstabel for $h(x)$ bestemt med *trapez metoden*.

n	$S_n(j_1)$	$S_n(j_2)$	$S_n(j_3)$
2	0.479329682252	0.63883676737	12.1054888574
4	0.734077387684	6.62819461170	6.38241135888
8	0.859688964192	3.91826964515	3.67510819446
16	0.921217964192	2.72036346008	2.48019892322
32	0.950129065388	2.27191271563	2.03114043541
64	0.961885815188	2.16016590454	1.91723944719
128	0.965362982534	2.14955888289	1.90531885130
256	0.966166104538	2.14946539708	1.90484646171
512	0.966359091034	2.14947663801	1.90476531971
1024	0.966406967248	2.14947945624	1.90474520443

Tabel 5.2: Iterationstabel for $j(x)$ bestemt med *trapez metoden*.

5.2.1 Richardson analyse af trapez metoden

Vi har brugt *trapez metoden* til at approksimere integralerne i (5.1), dermed er der tale om tilnærmelser til de eksakte værdier. For at vurdere præcisionen af de beregnede integraler, opstilles et estimat for *konvergensordenen* samt størrelsen af *fejlen* for de approksimerede integraler. Hertil anvendes *Richardson's* formler [5].

Det gælder at

$$\alpha^{k_i} \approx \frac{A(h_{i-2}) - A(h_{i-1})}{A(h_{i-1}) - A(h_i)}, \quad \alpha = \frac{h_{i-2}}{h_{i-1}} = \frac{h_{i-1}}{h_i} = 2. \quad (5.8)$$

Dermed kan *konvergensordenen* skrives

$$k_i \approx \log \left(\frac{A(h_{i-2}) - A(h_{i-1})}{A(h_{i-1}) - A(h_i)} \right) / \log(2). \quad (5.9)$$

Fejlen er givet ved

$$e(h_i) \approx \frac{A(h_{i-1}) - A(h_i)}{\alpha^{k_i} - 1} \quad (5.10)$$

For overskuelighedens skyld udføres den følgende analyse, kun for værdien $y = 0$, dvs. for $h_1(x)$ og $j_1(x)$ i ligning (5.1). Tabel 5.3 og tabel 5.4 angiver resultatet af *Richardson analysen* for

henholdsvis $h_1(x)$ og $j_1(x)$.

n	$S_n(h_1)$	k	$e(h_1)$
2	50.8774070980		
4	27.3749799904		2.10×10^1
8	16.2856835506	1.0836	8.71
16	11.4070885434	1.1846	1.1846
32	9.58506349096	1.4209	6.05×10^{-1}
64	9.13102043529	2.0046	4.81×10^{-2}
128	9.08755475960	3.3849	5.32×10^{-4}
256	9.08702873272	6.3686	-8.26×10^{-6}
512	9.08703712432	5.9701	-2.85×10^{-6}
1024	9.08703925429	1.9781	-7.25×10^{-7}

Tabel 5.3: Vurdering af konvergensorden og fejl for $h_1(x)$ bestemt med *trapez metoden*.

n	$S_n(j_1)$	k	$e(j_1)$
2	0.479329682252		
4	0.734077387684		-2.48×10^{-1}
8	0.859688964192	1.0201	-1.21×10^{-1}
16	0.921217964192	1.0296	-5.45×10^{-2}
32	0.950129065388	1.0896	-1.98×10^{-2}
64	0.961885815188	1.2981	-4.94×10^{-3}
128	0.965362982534	1.7575	-1.04×10^{-3}
256	0.966166104538	2.1142	-2.54×10^{-4}
512	0.966359091034	2.0571	-6.37×10^{-5}
1024	0.966406967248	2.0111	-1.58×10^{-5}

Tabel 5.4: Vurdering af konvergensorden og fejl for $j_1(x)$ bestemt med *trapez metoden*.

5.2.2 Trapez metoden vs. numerisk kvadratur i *Mathematica*

Vi har i det foregående afsnit approksimeret integralerne i (5.1) vha. *trapez metoden*. *Trapez metoden* er, som nævnt implementeret i en *Mathematica package*, der findes på den medfølgende CD. *Mathematica* har imidlertid den indbyggede funktion, `NIntegrate`, til numerisk integration. Funktionen `NIntegrate` gør brug af en avanceret *Monte Carlo algoritme* [24]. Bruges `NIntegrate` på funktionerne $h_1(x)$ og $j_1(x)$ fås

$$\text{NIntegrate}[h_1(x)]_{y=0} = 9.08703996429 \quad (5.11)$$

$$\text{NIntegrate}[j_1(x)]_{y=0} = 0.966422895133. \quad (5.12)$$

Tabel 5.5 viser en sammenligning af *trapez metoden* og *Mathematica's* indbyggede funktion `NIntegrate`. Den *relative fejl* e_r , er også angivet i tabellen.

n	$S_n(h_1)$	$e_r(h_1)$	$S_n(j_1)$	$e_r(j_1)$
2	50.8774070980	4.60	0.479329682252	-5.04×10^{-1}
4	27.3749799904	2.01	0.734077387684	-2.40×10^{-1}
8	16.2856835506	7.92×10^{-1}	0.859688964192	-1.10×10^{-1}
16	11.4070885434	2.55×10^{-1}	0.921217964192	-4.68×10^{-2}
32	9.58506349096	5.48×10^{-2}	0.950129065388	-1.69×10^{-2}
64	9.13102043529	4.84×10^{-3}	0.961885815188	-4.69×10^{-3}
128	9.08755475960	5.67×10^{-5}	0.965362982534	-1.10×10^{-3}
256	9.08702873272	-1.24×10^{-6}	0.966166104538	-2.66×10^{-4}
512	9.08703712432	-3.13×10^{-7}	0.966359091034	-6.60×10^{-5}
1024	9.08703925429	-7.81×10^{-8}	0.966406967248	-1.65×10^{-6}

Tabel 5.5: Sammenligning af *trapez metoden* og *Mathematica's* indbyggede funktion `NIntegrate`.

5.3 Produkt trapez metoden

Integralerne i (5.1) er, ligesom for *trapez metoden*, blevet approksimeret med *produkt trapez metoden*. Til dette formål er der blevet udarbejdet en ²*Mathematica package*, som implementerer *produkt trapez metoden*. Dette afsnit præsenterer resultaterne af integralerne i (5.1), når disse beregnes med *produkt trapez metoden*.

Betragt det generelle integral

$$\int_a^b f(x)\omega(x) dx, \quad (5.13)$$

hvor $f \in C^k([a, b])$, mens vægtfunktionen ω har singularitet i intervallet $[a, b]$. Et eksempel på et integral af formen (5.13) er

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{d^2 + (x-y)^2}} dx, \quad (5.14)$$

hvor $d > 0$, $d \ll 1$ samt y varierer i intervallet $[a, b]$. En måde hvormed integraler af formen (5.13) kan integreres numerisk, er ved at bruge såkaldt *produkt integration*. Princippet i *produkt integration* svarer til princippet i de traditionelle *Newton-Cotes* metoder [5]. Intervallet $[a, b]$ inddeles i n delintervaller, hver af længde $h = (b-a)/n$, og vi sætter $y_i = a + ih$. I stedet for at interpolere hele integranden i hvert delinterval, interpoleres kun den ”pæne” del af integranden. Dvs. $f(x)$.

I intervallet $[y_{i-1}, y_i]$ angiver P_i det 1. grads polynomium, som opfylder $P_i(y_{i-1}) = f(y_{i-1})$ og $P_i(y_i) = f(y_i)$. Lad f_h være den stykvis lineære funktion i intervallet $[a, b]$, som opfylder $f_h(x) = P_i(x)$ for $y_{i-1} \leq x \leq y_i$. Så defineres

$$S_i(f) = \int_{y_{i-1}}^{y_i} P_i(x)\omega(x) dx \quad \text{og} \quad S_h(f) = \sum_{i=1}^n S_i(f) = \int_a^b f_h(x)\omega(x) dx. \quad (5.15)$$

²Produkt trapez metoden er implementeret i filen ”ProductTrapezoidalMethod.nb”, som findes på den vedlagte CD. Denne fil indeholder desuden udførlige udledninger af de integraler, som indgår i metoden. Se bilag E for indhold af CD.

Ligning (5.15) kaldes *produkt trapez metoden*. Hvis $f \in C^2([a, b])$, så findes der en konstant C , således at *produkt trapez metoden* har følgende *fejlvurdering*:

$$\left| S_h(f) - \int_a^b f(x)\omega(x) dx \right| \leq Ch^2. \quad (5.16)$$

Tabel 5.6 og tabel 5.7 angiver approksimationer af integralerne for henholdsvis $h(x)$ og $j(x)$ i ligning (5.1).

n	$S_n(h_1)$	$S_n(h_2)$	$S_n(h_3)$
2	8.97055320121	8.38899181947	4.81700948385
4	9.05169318147	8.58256114509	4.86781357571
8	9.07688756666	8.60628477215	4.88254357487
16	9.08426046344	8.61324763937	4.88667752084
32	9.08631187561	8.61518943770	4.88779963395
64	9.08685535890	8.61570452405	4.88809327260
128	9.08699374610	8.61583573117	4.88816775393
256	9.08702840951	8.61586859733	4.88818640121
512	9.08703707559	8.61587681408	4.88819106300
1024	9.08703924211	8.61587886826	4.88819222844

Tabel 5.6: Iterationstabel for $h(x)$ bestemt med *produkt trapez metoden*.

n	$S_n(j_1)$	$S_n(j_2)$	$S_n(j_3)$
2	0.939865806706	2.09174693760	1.88505232303
4	0.960584245155	2.14117330109	1.89802473745
8	0.965071690007	2.14709205280	1.90270057183
16	0.966098774476	2.14882453581	1.90416538098
32	0.966343436835	2.14930827451	1.90458659254
64	0.966403179358	2.14943673011	1.90469984915
128	0.966417976495	2.14946946297	1.90472882646
256	0.966421666070	2.14947766245	1.90473609096
512	0.966422587903	2.14947971235	1.90473790738
1024	0.966422818328	2.14948022483	1.90473836150

Tabel 5.7: Iterationstabel for $j(x)$ bestemt med *produkt trapez metoden*.

5.3.1 Richardson analyse af produkt trapez metoden

Vi har brugt *produkt trapez metoden* til at approksimere integralerne i (5.1), dermed er der tale om tilnærmelser til de eksakte værdier. For at vurdere præcisionen af de beregnede integraler, opstilles et estimat for *konvergensordenen* samt størrelsen af *fejlen* for de approksimerede integraler. Hertil anvendes *Richardson's* formler, som er angivet i afsnit 5.2.1.

Tabel 5.8 og tabel 5.9 angiver resultatet af *Richardson analysen* for henholdsvis $h_1(x)$ og $j_1(x)$.

n	$S_n(h_1)$	k	$e(h_1)$
2	8.97055320121		
4	9.05169318147		-3.65×10^{-2}
8	9.07688756666	1.6873	-1.04×10^{-2}
16	9.08426046344	1.7728	-2.84×10^{-3}
32	9.08631187561	1.8456	-7.39×10^{-4}
64	9.08685535890	1.9163	-1.86×10^{-4}
128	9.08699374610	1.9735	-4.62×10^{-5}
256	9.08702840951	1.9972	-1.16×10^{-5}
512	9.08703707559	2.0000	-2.89×10^{-6}
1024	9.08703924211	2.0000	-7.22×10^{-7}

Tabel 5.8: Vurdering af konvergensorden og fejl for $h_1(x)$ bestemt med *produkt trapez metoden*.

n	$S_n(j_1)$	k	$e(j_1)$
2	0.939865806706		
4	0.960584245155		-5.73×10^{-3}
8	0.965071690007	2.2069	-1.33×10^{-3}
16	0.966098774476	2.1273	-3.21×10^{-4}
32	0.966343436835	2.0697	-7.90×10^{-5}
64	0.966403179358	2.0340	-1.97×10^{-5}
128	0.966417976495	2.0134	-4.92×10^{-6}
256	0.966421666070	2.0038	-1.23×10^{-6}
512	0.966422587903	2.0009	-3.07×10^{-7}
1024	0.966422818328	2.0002	-7.68×10^{-8}

Tabel 5.9: Vurdering af konvergensorden og fejl for $j_1(x)$ bestemt med *produkt trapez metoden*.

5.3.2 Produkt trapez metoden vs. numerisk kvadratur i *Mathematica*

Vi har i det foregående afsnit approksimeret integralerne i (5.1) vha. *produkt trapez metoden*. *Produkt trapez metoden* er, som nævnt implementeret i en *Mathematica package*, der findes på den medfølgende CD.

Bruges *Mathematica's* indbyggede funktion `NIntegrate` på funktionerne $h_1(x)$ og $j_1(x)$ fås

$$\text{NIntegrate}[h_1(x)]_{y=0} = 9.08703996429 \quad (5.17)$$

$$\text{NIntegrate}[j_1(x)]_{y=0} = 0.966422895133. \quad (5.18)$$

Tabel 5.10 viser en sammenligning af *produkt trapez metoden* og *Mathematica's* indbyggede funktion `NIntegrate`. Den *relative fejl* e_r , er også angivet i tabellen.

n	$S_n(h_1)$	$e_r(h_1)$	$S_n(j_1)$	$e_r(j_1)$
2	8.97055320121	-1.28×10^{-2}	0.939865806706	-2.75×10^{-2}
4	9.05169318147	-3.89×10^{-3}	0.960584245155	-6.04×10^{-3}
8	9.07688756666	-1.12×10^{-3}	0.965071690007	-1.40×10^{-3}
16	9.08426046344	-3.06×10^{-4}	0.966098774476	-3.35×10^{-4}
32	9.08631187561	-8.01×10^{-5}	0.966343436835	-8.22×10^{-5}
64	9.08685535890	-2.03×10^{-5}	0.966403179358	-2.04×10^{-5}
128	9.08699374610	-5.09×10^{-6}	0.966417976495	-5.09×10^{-6}
256	9.08702840951	-1.27×10^{-6}	0.966421666070	-1.27×10^{-6}
512	9.08703707559	-3.18×10^{-7}	0.966422587903	-3.18×10^{-7}
1024	9.08703924211	-7.95×10^{-8}	0.966422818328	-7.95×10^{-8}

Tabel 5.10: Sammenligning af *produkt trapez metoden* og *Mathematica's* indbyggede funktion `NIntegrate`.

5.4 Delkonklusion

Ud fra den foregående analyse kan vi konstatere, at *trapez metoden* har problemer med integralerne i (5.1). Det skyldes primært den noget ubehagelige nævner, $\sqrt{a^2 + (x - y)^2}$, der indgår i disse integraler. At nævneren er på denne form, gør at *trapez metoden* skal bruge mange iterationer for at opnå en acceptabel nøjagtighed. Eksempelvis skal *trapez metoden*, ifølge tabel 5.4, bruge 128 iterationer til at opnå en nøjagtighed af størrelsesordenen -1.04×10^{-3} for integralet $j_1(x)$. At der skal mange iterationer til for at *trapez metoden* kan anvendes på integralerne i (5.1), fremgår også af tabel 5.5. Her sammenlignes *trapez metoden* med *Mathematica's* indbyggede funktion til numerisk integration. Sammenligningen bekræfter desuden korrektheden af *Richardson analysen*, idet den beregnede fejl på -1.04×10^{-3} for integralet j_1 stemmer overens med den tilsvarende fejl på -1.10×10^{-3} , som blev fundet i sammenligningen mellem *Mathematica's* indbyggede funktion og *trapez metoden*.

Anderledes forholder det sig med *produkt trapez metoden*. For integralerne i (5.1) opnår *produkt trapez metoden* relativt hurtigt en acceptabel nøjagtighed, hvilket fremgår af tabel 5.8 og tabel 5.9. For det tidligere nævnte integral j_1 , giver *produkt trapez metoden* en fejl på -4.92×10^{-6} efter 128 iterationer. Hvor *trapez metoden* til sammenligning giver en fejl på -1.04×10^{-3} .

Nævneren i kernen K i *Hallén's* ligning er identisk med nævneren i (5.1). Dermed har dette eksperiment vist, at *produkt trapez metoden* til løsning af *Hallén's* integralligning vil være at foretrække fremfor *trapez metoden*, idet sidstnævnte konvergerer forholdsvis langsomt.

Kapitel 6

Test

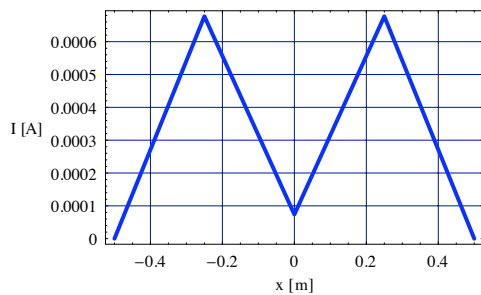
I dette kapitel præsenteres resultaterne af de numeriske løsninger til *Hallén's* integralligning.

Alle tests er udført med følgende parametre:

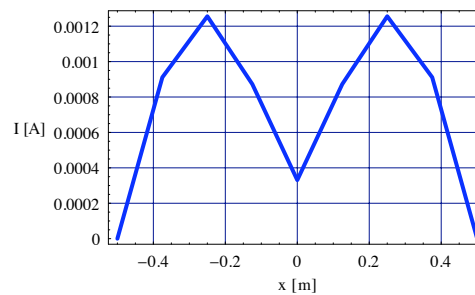
- $\lambda = 1.0$: Bølgelængde.
- $k = 2\pi/\lambda$: Fasekonstant.
- $L = \lambda$: Antenne længde.
- $a = 0.01\lambda$: Antenne radius.
- $\eta = 120\pi$: Karakteristisk impedans.
- $C_2 = 0.5$: Konstant i *Hallén's* ligning, $C_2 = V/2$, hvor V angiver terminalspændingen.
- $guess1 = 0.1$: Første startgæt til bestemmelse af *Hallén's* konstant C_1 .
- $guess2 = 0.2$: Andet startgæt til bestemmelse af *Hallén's* konstant C_1 .

6.1 Test af trapez metoden anvendt på *Hallén's* ligning

I dette afsnit præsenteres resultaterne af *trapez metoden*, anvendt på *Hallén's* integralligning (4.1).



Figur 6.1: $I_{n=4}$ for *trapez metoden*.



Figur 6.2: $I_{n=8}$ for *trapez metoden*.

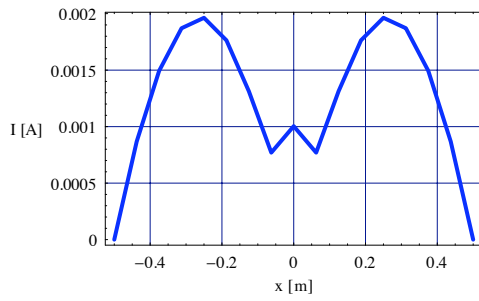


Figure 6.3: $I_{n=16}$ for *trapez metoden*.

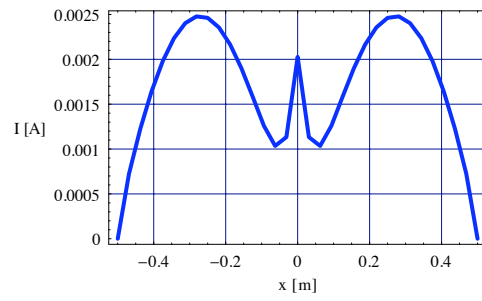


Figure 6.4: $I_{n=32}$ for *trapez metoden*.

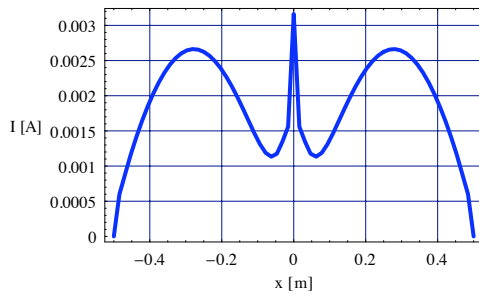


Figure 6.5: $I_{n=64}$ for *trapez metoden*.

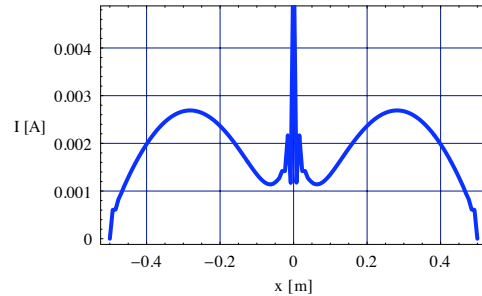


Figure 6.6: $I_{n=128}$ for *trapez metoden*.

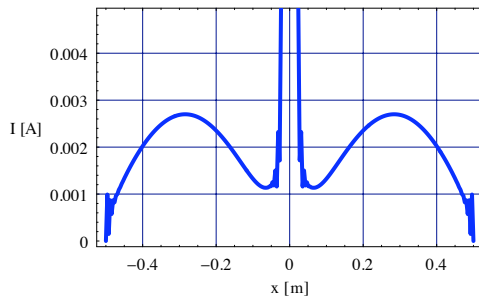


Figure 6.7: $I_{n=256}$ for *trapez metoden*.

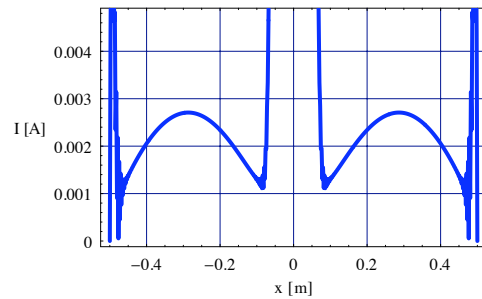
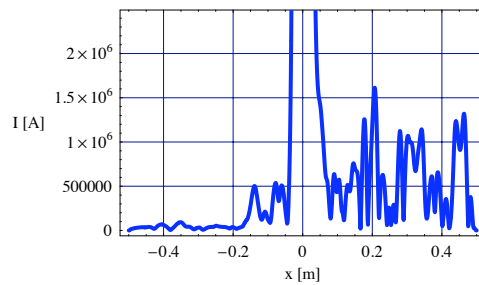


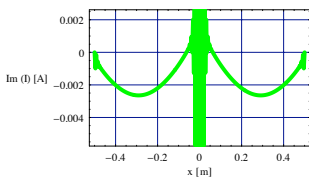
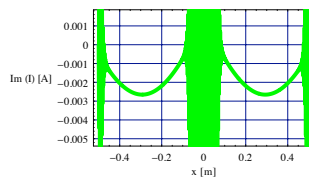
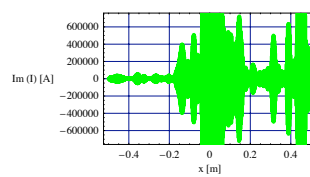
Figure 6.8: $I_{n=512}$ for *trapez metoden*.

Figur 6.9: $I_{n=1024}$ for *trapez metoden*.

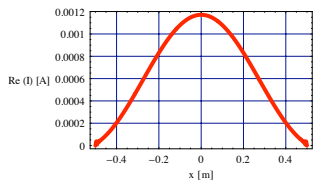
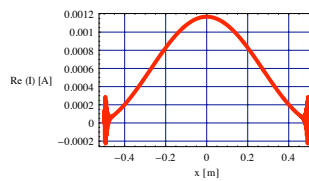
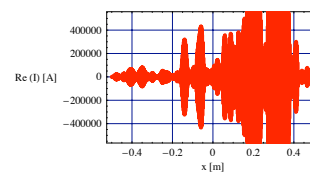
Figurerne 6.1 - 6.9 viser den numeriske løsning af *Hallén's* integralligning (4.1), bestemt med *trapez metoden*. Graferne viser *amplituden* af strømmen $I(y)$, eller rettere approksimationen $u_j \approx I(y_j)$ for $j = 0, \dots, n$. Dermed repræsenterer u , strømmen i interpolationspunkterne. Strømmen $I(y)$ i den *lineære cylindriske dipol antenne* er kompleks. Derfor er u en vektor bestående af komplekse elementer. Graferne i figurerne 6.1 - 6.9, angiver den *komplekse modulus* for hvert af elementerne i vektor u .

Som det fremgår af figurerne, er der problemer omkring midten af antennen - altså for $x = 0$. Dette skyldes, som tidligere nævnt, at højresiden D_1 i *Hallén's* ligning ikke er differentiabel i punktet $x = 0$. Diskontinuiteten overføres altså til det *diskrete problem*. Udsvinget omkring midten af antennen synes, ifølge graferne, at blive større og større efterhånden som n øges. Vi kan imidlertid ikke gøre noget ved problemet omkring centrum af antennen, eftersom det er en konsekvens af *Delta gap modellen*. En måde at fjerne udsvinget i antennens centrum, er ved at ændre modellen - dvs. at gøre højresiden D_1 i *Hallén's* ligning differentiabel i punktet $x = 0$. En alternative mulighed er, at benytte en anden antenne model - eksempelvis *Magnetic frill generator* modellen. Vi vil imidlertid kun fokusere på den førstnævnte mulighed, nemlig at ændre modellen.

Som vi senere skal se, kan modellen tilpasses, således de store udsving nær antennens centrum fjernes. Mere bekymrende er det derimod, at der opstår kraftige oscillationer i enderne af antennen. Oscillationerne er først at se for relative store værdier af n - omkring $n \geq 256$. Svingningerne i enderne af antennen kan ikke tillægges modellen, tværtimod har vi netop løst *Hallén's* ligning, således at $I(-L/2) = I(L/2) = 0$ burde være opfyldt - altså at strømmen i enderne er nul. Lad os se nærmere på hvad der sker med løsningen, når $n \geq 256$. Det viser sig faktisk at bidraget til oscillationerne i enderne, er størst for den *imaginære* del af strømmen. Dette fremgår tydeligt af figurerne 6.10 - 6.12, som viser den *imaginære* del af strømmen - dvs. $\Im m(I_n)$ - for $n = 256$, $n = 512$ og $n = 1024$.

Figur 6.10: $\Im m(I_{n=256})$.Figur 6.11: $\Im m(I_{n=512})$.Figur 6.12: $\Im m(I_{n=1024})$.

Til sammenligning viser figurerne 6.13 - 6.15, den *reelle* del af strømmen - dvs. $\Re(I_n)$ - for $n = 256$, $n = 512$ og $n = 1024$. Her fremgår det, at der også er oscillationer i enderne af antennen for den *reelle* del af strømmen, men at disse ikke er nær så kraftige som i det *imaginære* tilfælde. Desuden er det interessant, at den *reelle* del af strømmen er kontinuert over hele antennen, hvilket tyder på at diskontinuiteten i centrum af antenne udelukkende stammer fra den *imaginære* del af strømmen.

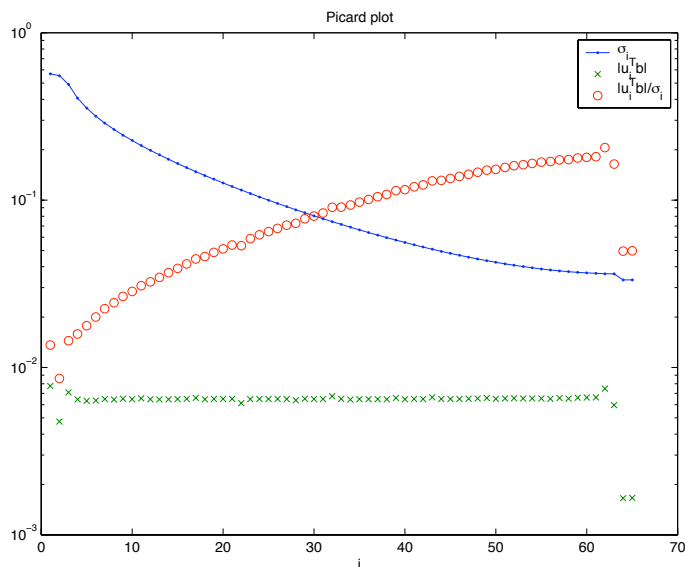
Figur 6.13: $\Re(I_{n=256})$.Figur 6.14: $\Re(I_{n=512})$.Figur 6.15: $\Re(I_{n=1024})$.

At *trapez metoden* har problemer med løsning af *Hallén's ligning*, fremgår også af tabel 6.1. Tabellen viser *Hallén's* konstant C_1 samt *konditionstallet* $\kappa(A)$ af koefficientmatricen A . Specielt interessante er værdierne af $\kappa(A)$, for $n = 512$ og $n = 1024$. Så høje værdier for konditionstallet vidner om, at det diskrete system er *ill-posed*.

n	C_1	$\kappa(A)$
4	$-0.000974992 + 0.0145995i$	2.37273
8	$-0.0173335 + 0.0346092i$	3.11304
16	$-0.0484162 + 0.0594133i$	5.08174
32	$-0.0841362 + 0.0790397i$	10.5236
64	$-0.107947 + 0.0871604i$	28.8237
128	$-0.120609 + 0.0892104i$	211.845
256	$-0.129867 + 0.0903497i$	16441.8
512	$-0.138233 + 0.0914341i$	7.1813×10^7
1024	$-2.56182 + 1.5602 i$	9.9110×10^{14}

Tabel 6.1: Iterationstabel for *trapez metoden* anvendt på *Hallén's ligning*.

For at karakterisere det diskrete system, som værende *ill-posed*, skal begge betingelser i afsnit 3.3.4 være opfyldt. Derfor plottes de singulære værdier for *trapez metoden*. Vi vælger at plote de singulære værdier for $n = 64$. Resultatet ses af figur 6.16.



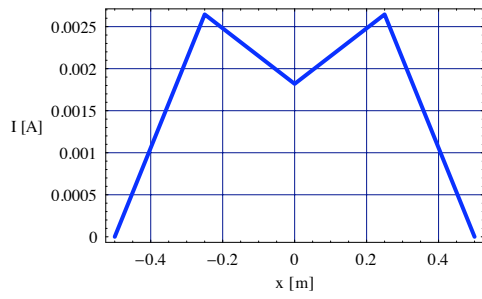
Figur 6.16: Plot af de singulære værdier σ_i og koefficienterne $|u_i^T b|$ for *Hallén's* integralligning (4.1), diskretiseret med *trapez metoden* og for $n = 64$.

Af figur 6.16 ses det at alle de singulære værdier σ_i , gradvist aftager mod nul (indtil de flader ud på et plateau, bestemt af maskinpræcisionen, uden for plottet). Dette er almindelig opførsel af de singulære værdier for et *ill-posed* system. Desuden bemærkes det, at koefficienterne $u_i^T b$ alle ligger på en vandret linie omkring 10^{-2} , hvilket indikerer problemer. Eftersom koefficienterne $u_i^T b$ aftager langsommere end de singulære værdier σ_i , kan vi konstatere at den *diskrete Picard betingelse* ikke er opfyldt. At den *diskrete Picard betingelse* ikke er opfyldt, betyder at ikke engang *regulering* kan benyttes til løsning af det diskrete system. Plottet i figur 6.16 er for $n = 64$, men det skal for en ordens skyld nævnes, at tendensen er den samme for andre værdier af n - den *diskrete Picard betingelse* er ikke opfyldt.

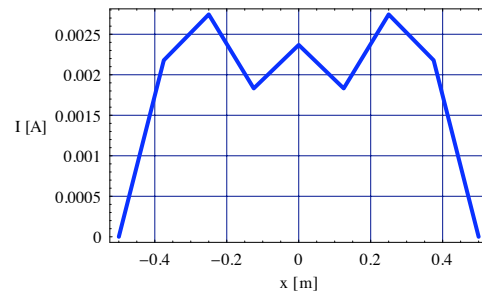
Det skal understreges at ovenstående analyse ikke viser om problemerne stammer fra *Hallén's* integralligning, fra diskretisering med *trapez metoden* eller fra andre kilder. Vi må blot konstatere at *Hallén's* integralligning diskretiseret med *trapez metoden*, giver et diskret system, som udover at være *ill-posed* ikke opfylder den *diskrete Picard betingelse*.

6.2 Test af produkt trapez metoden anvendt på *Hallén's* ligning

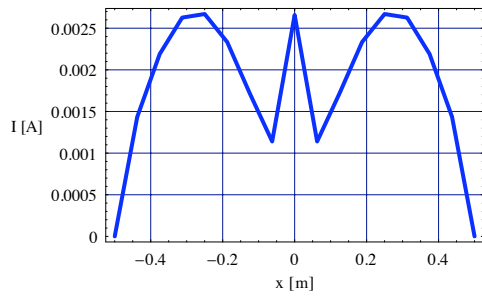
I dette afsnit præsenteres resultaterne af *produkt trapez metoden*, anvendt på *Hallén's* integralligning (4.1).



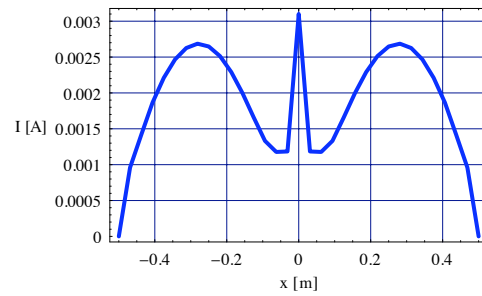
Figur 6.17: $I_{n=4}$ for produkt trapez metoden.



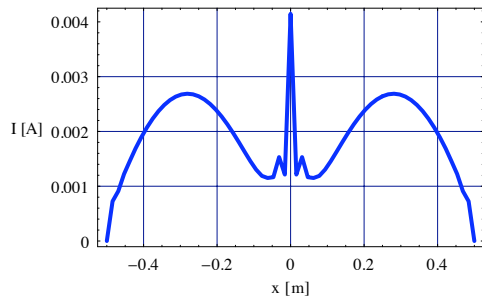
Figur 6.18: $I_{n=8}$ for produkt trapez metoden.



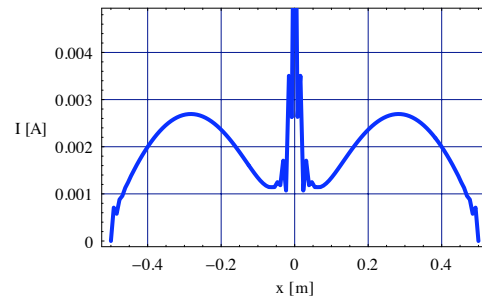
Figur 6.19: $I_{n=16}$ for produkt trapez metoden.



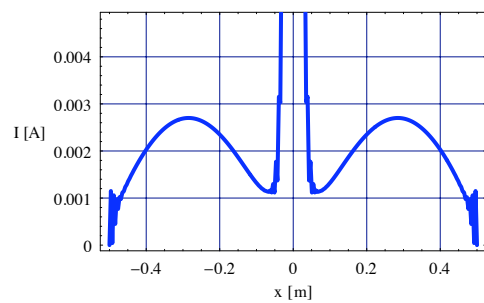
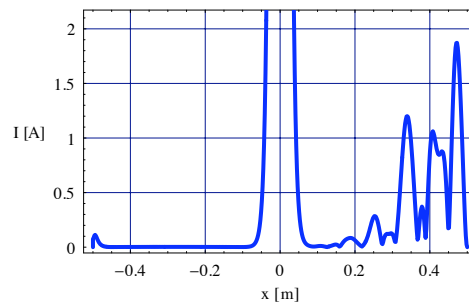
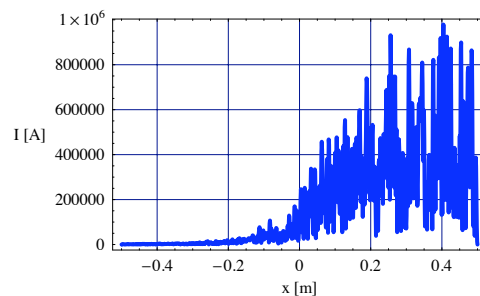
Figur 6.20: $I_{n=32}$ for produkt trapez metoden.



Figur 6.21: $I_{n=64}$ for produkt trapez metoden.



Figur 6.22: $I_{n=128}$ for produkt trapez metoden.

Figur 6.23: $I_{n=256}$ for *produkt trapez metoden*.Figur 6.24: $I_{n=512}$ for *produkt trapez metoden*.Figur 6.25: $I_{n=1024}$ for *produkt trapez metoden*.

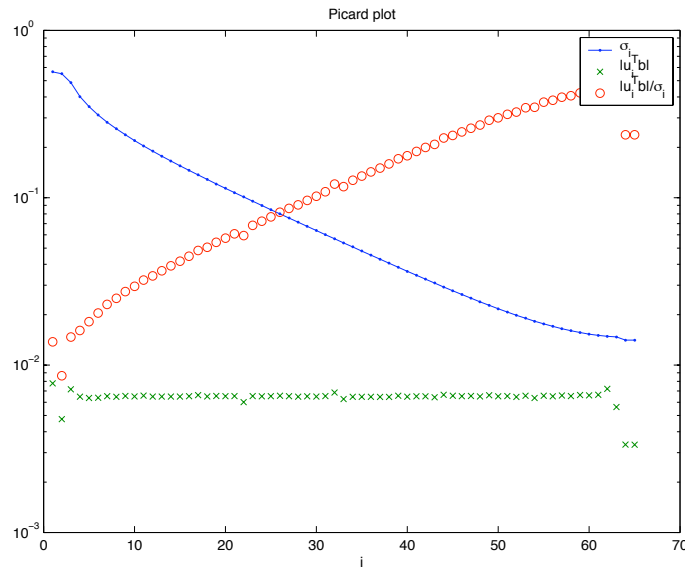
Figureerne 6.17 - 6.25 viser den numeriske løsning af *Hallén's* integralligning (4.1), bestemt med *produkt trapez metoden*. Som det fremgår, opstår der stadig kraftige svingninger i enden af antennen, hvilket indikerer at det diskrete system er *ill-posed*. Det virker ikke umiddelbart som om, der er forskel på om *Hallén's* ligning diskretiseres med *trapez metoden* eller *produkt trapez metoden* - begge metoder giver en dårlig konditioneret coefficientmatrix for store værdier af n . Desuden "eksploderer" løsningen fuldstændigt for $n = 1024$, hvilket fremgår af figur 6.25 samt tabel 6.2.

n	C_1	$\kappa(A)$
4	$-0.00710079 + 0.108196i$	3.85166
8	$-0.0729753 + 0.109063i$	5.74690
16	$-0.097511 + 0.0960135i$	9.68509
32	$-0.108634 + 0.0906921i$	20.0332
64	$-0.116607 + 0.0895978i$	62.4396
128	$-0.124052 + 0.0899246i$	518.992
256	$-0.131509 + 0.0906667i$	40471.0
512	$-0.120598 + 0.0906793i$	2.91549×10^8
1024	$1.162080 + 14.9546i$	2.94021×10^{14}

Tabel 6.2: Iterationstabel for *produkt trapez metoden* anvendt på *Hallén's* ligning.

Ligesom for *trapez metode* plottes de singulære værdier. Vi vælger igen at plotte de singulære

værdier for $n = 64$, således har vi et sammenligningsgrundlag for de to diskretiseringsmetoder. Resultatet ses af figur 6.26.



Figur 6.26: Plot af de singulære værdier σ_i og koefficienterne $|u_i^T b|$ for Hallén's integralligning (4.1), diskretiseret med *produkt trapez metoden* og for $n = 64$.

Af figur 6.26 ses det at den *diskrete Picard betingelse* heller ikke er opfyldt for Hallén's integralligning diskretiseret med *produkt trapez metode*. Argumentationen følger den for *trapez metoden*, dog synes de singulære værdier at aftage en anelse hurtigere end det var tilfældet for *trapez metoden*.

6.3 Et forsøg på ændring af modellen

Vi har i det foregående observeret problemer med konditioneringen af koefficientmatricen, som indgår i den diskrete repræsentation af Hallén's integralligning. Den dårlige konditionering er at se, når antallet af iterationer nærmer sig en værdi på 512 - dvs. $n = 512$. Dette er gældende for både *trapez metoden* og *produkt trapez metoden*. Efter 512 iterationer er løsningen af Hallén's ligning, med *trapez metoden*, kraftigt svingende omkring centrum af antennen samt i enderne af antennen. Efter 1024 iterationer er løsningen af Hallén's ligning, fundet med *trapez metoden*, ikke længere *symmetrisk* - dvs. $I(-x) \neq I(x)$. Nogenlunde på samme måde forholder det sig med løsningen fundet med *produkt trapez metoden*. Her er løsning dog *asymmetrisk* efter 512 iterationer.

Konditionstallet $\kappa(A)$, udtrykker konditionen af venstresiden i den diskrete form af Hallén's ligning. At der efter mange iterationer opstår svingningerne i antennens ender, er derfor en direkte konsekvens af det høje konditionstal $\kappa(A)$. Konditionstallet $\kappa(A)$, udtrykker derfor ikke noget om svingningerne omkring antennens centrum. I det følgende undersøges det om en ændring af modellen, således at højresiden i Hallén's integralligning (4.1) bliver differentiabel i punktet $x = 0$, har betydning for løsningen af det diskrete system.

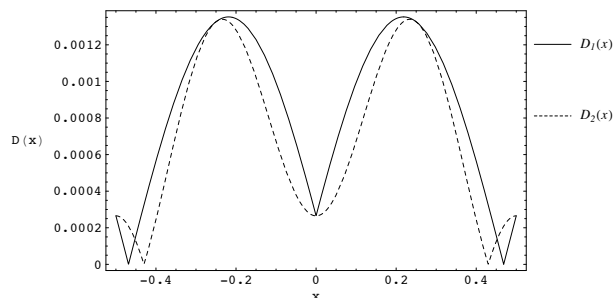
I kapitel 4 blev det eksterne elektriske felt - altså højresiden (4.3) i *Hallen's* integralligning - givet ved

$$D_1(x) = -\frac{i}{\eta} \left(C_1 \cos(kx) + C_2 \sin k|x| \right), \quad (6.1)$$

som ikke er differentiabel i punktet $x = 0$. Istedet defineres funktionen

$$D_2(x) = -\frac{i}{\eta} \left(C_1 \cos(kx) + C_2 \left(\sin(kx) \right)^2 \right). \quad (6.2)$$

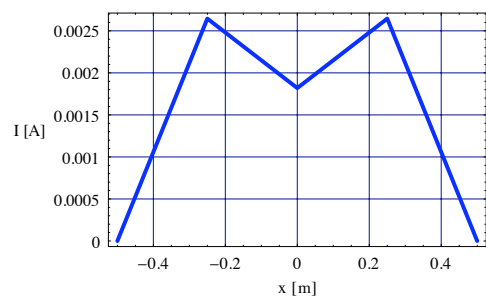
På figur 6.27 ses en sammenligning af funktionerne D_1 og D_2 .



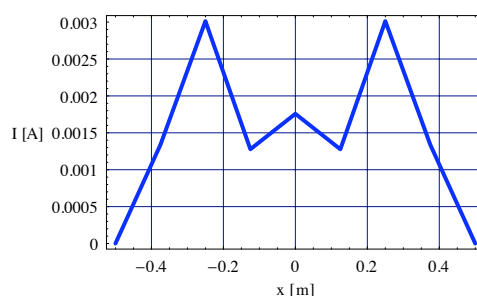
Figur 6.27: Sammenligning af funktionerne $D_1(x)$ og $D_2(x)$.

Vi vil i det følgende løse *Hallen's* ligning, når den oprindelige diskontinuerte højreside D_1 erstattes af den kontinuerte funktion D_2 . Det skal understreges at dette eksperiment er af rent matematisk karakter, og skal derfor ikke tolkes som et forsøge på at skabe en model, der er i overensstemmelse med de fysiske forhold for dipol antennen.

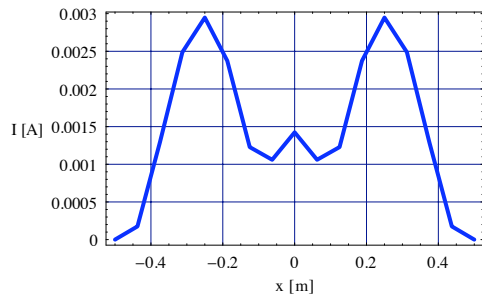
Figureerne 6.28 - 6.36 viser løsningen af *Hallen's* ligning med *produkt trapez metoden*, når den oprindelige højreside D_1 erstattes af D_2 .



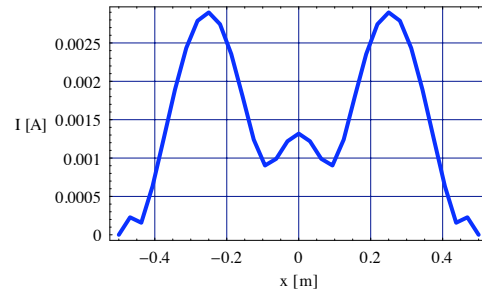
Figur 6.28: $I_{n=4}$ for modificeret højreside og bestemt med *produkt trapez metoden*.



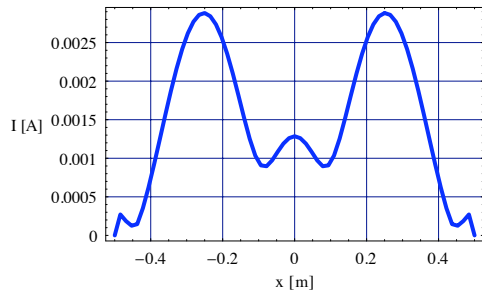
Figur 6.29: $I_{n=8}$ for modificeret højreside og bestemt med *produkt trapez metoden*.



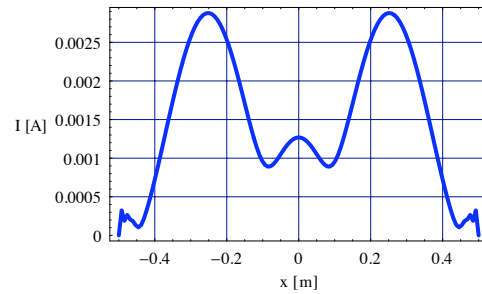
Figur 6.30: $I_{n=16}$ for modificeret højreside og bestemt med *produkt trapez metoden*.



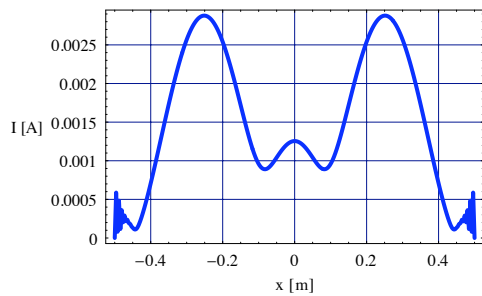
Figur 6.31: $I_{n=32}$ for modificeret højreside og bestemt med *produkt trapez metoden*.



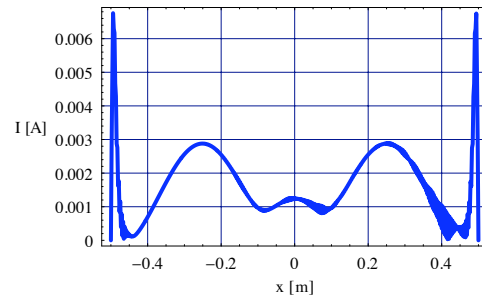
Figur 6.32: $I_{n=64}$ for modificeret højreside og bestemt med *produkt trapez metoden*.



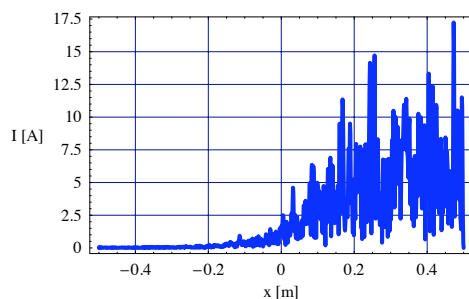
Figur 6.33: $I_{n=128}$ for modificeret højreside og bestemt med *produkt trapez metoden*.



Figur 6.34: $I_{n=256}$ for modificeret højreside og bestemt med *produkt trapez metoden*.



Figur 6.35: $I_{n=512}$ for modificeret højreside og bestemt med *produkt trapez metoden*.



Figur 6.36: $I_{n=1024}$ for modificeret højreside og med *produkt trapez metoden*.

Af figurerne 6.28 - 6.34 ses det at svingningerne omkring centrum af antennen fjernes, når den oprindelige højreside D_1 i *Hallén's* integralligning erstattes af den kontinuerte funktion D_2 . Men for $n = 512$ begynder svingningerne i enderne af antennen, at blive så kraftige så de får indflydelse på strømmen omkring centrum af antennen. Ligeledes begynder løsningen at blive svagt asymmetrisk. Dette fremgår af figur 6.35. Efter 1024 iterationer er løsningen fuldstændigt svingende - og må betragtes som vilkårlig støj, hvilket fremgår tydeligt af figur 6.36.

Hermed kan det konstateres, at problemerne med løsning af *Hallén's* integralligning ikke skyldes den oprindelige højreside D_1 , men kernen K . Dette fremgår direkte af ovenstående, idet svingningerne i enderne af antennen fortsætter med at eksistere, selvom højresiden gøres differentiable i punktet $x = 0$.

6.4 Delkonklusion

Vi har i dette kapitel præsenteret løsninger af *Hallén's* integralligning med henholdsvis *trapez metoden* og *produkt trapez metoden*, og konklusionen er den samme for begge metoder - løsningerne konvergerer ikke. Vi så i afsnit 2.6 at der ikke eksisterer nogen integrabel løsning til *Hallén's* ligning, hvilket er den direkte årsag til at *Picard betingelsen* ikke er opfyldt. Ifølge [11] kan det vises at hvis den underliggende integralligning opfylder *Picard betingelsen*, så vil det diskrete system, som fås ved diskretisering af integralligning, opfylde den *diskrete Picard betingelse*. Altså er der en klar sammenhæng mellem *Picard betingelsen* og den *Diskrete Picard betingelse*, hvilket ovenstående tests bekræfter.

Kapitel 7

Sammenfatning

Det overordnede problem i dette projekt har været at analysere og implementere numeriske metoder til løsning af en integralligning i en antennemodell. Den primære fokus har været på modellen for den *lineære cylindriske dipol antenne*. For denne antennemodell, er der blevet udledt to integralligninger - henholdsvis *Hallén's* integralligning og *Pocklington's* integralligning. Hovedvægten i projektet har været på *Hallén's* ligning, som er blevet løst med to forskellige diskretiseringsmetoder - *trapez metoden* og *produkt trapez metoden*. I begge tilfælde er spændingskilden for dipol antennen modelleret vha. *Delta gap* modellen, som blev beskrevet i afsnit 2.2.1.

Rammerne i dette projekt har primært været, at bestemme numeriske løsninger til *Hallén's* integralligning. Den beregningsmodell der har dannet grundlag for de numeriske implementationer, har imidlertid vist sig at være utilstrækkelig - forstået på den måde at konsekvensen af at der ikke findes en analytisk integrabel løsning til *Hallén's* ligning, er at der heller ikke findes en numerisk stabil løsning. I hvert fald ikke for de diskretiseringsmetoder vi har undersøgt.

Det kunne derfor være interessant at undersøge, om problemerne med bestemmelse af en numerisk løsning til *Hallén's* ligning også gør sig gældende for *Pocklington's* integralligning. Til dette formål har vi implementeret den såkaldte *Moment metode*, og anvendt den til diskretisering af *Pocklington's integralligning*. Vi nøjes her med at angive detaljerne af denne test. Yderligere resultater fremgår af bilag D.

Det viser sig, at de samme problemer også gør sig gældende for numerisk løsning af *Pocklington's* ligning diskretiseret med *Moment metoden*. Af bilag D fremgår det, at den numeriske løsning ikke konvergerer til et brugbart resultat. Som det var tilfældet med *Hallén's* ligning, opstår der oscillationer omkring centrum af antennen (nær punktet $x = 0$) samt i enderne af antennen (nær punkterne $x = -L/2$ og $x = L/2$). Igen er svingningerne i enderne af antennen den primære årsag til at løsningen ikke konvergerer. Diskretisering af *Pocklington's* ligning med *moment metoden* giver dermed også et diskret system, som er ill-posed. Dog synes værdierne for konditionstallet af koefficientmatricen i *Pocklington's* tilfælde, at være mindre end de tilsvarende værdier for *Hallen's* ligning diskretiseret med henholdsvis *trapez metoden* og *produkt trapez metoden*.

Måske er det ikke overraskende, at den numeriske løsning af *Pocklington's* ligning diskretiseret med *Moment metoden*, også lider under at det diskrete system er ill-posed. I den forbindelse er det værd at huske, at *Hallén's* ligning er en udledning af *Pocklington's* ligning. Vi kan blot konstatere, at den form af *Pocklington's* ligning vi har fokuseret på ikke kan bruges til bestemmelse af strømmen i den *lineære cylindriske dipol antenne*.

I det følgende opsummeres de væsentligste observationer, som er blevet gjort i forbindelse med numerisk løsning af *Hallén's ligning* for dipol antennen.

- Diskontinuitet i punktet $x = 0$ for højresiden D_1 (4.3) i *Hallén's ligning* (4.1), er den direkte årsag til de kraftige svingninger omkring centrum af dipol antenne.
- For svingningerne i centrum af antennen gælder:
 - ▲ De er en konsekvens af *Delta gap* modellen, idet antennen "klippes" over på midten, dermed løber der ingen strøm i centrum af antennen.
 - ▲ De opstår tilsyneladende, når antallet af diskretiseringspunkter bliver større end værdien L/a - dvs. når $n > L/a$, hvor L angiver længden af antennen og a angiver antennens radius.
 - ▲ De bliver kraftigere efterhånden som antallet af iterationer n øges.
 - ▲ De er primært forårsaget af den imaginære del af strømmen.
 - ▲ De kan elimineres ved at ændre modellen - f.eks. ved at gøre højresiden D_1 differentiel i punktet $x = 0$.
- Udseendet af kernen K (4.2) i *Hallen's ligning*, betyder at der opstår svingninger i enderne af dipol antennen.
- For svingningerne i enderne af antennen gælder:
 - ▲ De er en konsekvens af at *Hallén's ligning* ikke har en integrabel analytisk løsning - dvs. *Picard betingelsen* ikke er opfyldt.
 - ▲ De synes at opstå, når antallet af diskretiseringspunkter overskrider den vigtige parameter L/a .
 - ▲ De bliver kraftigere efterhånden som antallet af iterationer n øges.
 - ▲ De er repræsenteret i både den reelle og den imaginære del af stømmen.
 - ▲ De har indfyldelse på størrelsen konditionstallet for koefficientmatricen i det diskrete system. Konditionstallet vokser i takt med svingningernes størrelse.

7.1 Diskussion

I dette afsnit diskuteres alternative modeller for den *lineære cylindriske dipol antenne*, som gør at der eksisterer løsninger til henholdsvis *Hallén's* og *Pocklington's* integralligninger. Vi har konstateret at kernen K i *Hallen's* ligning er den primære årsag til, at der ikke findes en integrabel analytiske løsning - og dermed ingen numerisk stabil løsning. I dette projekt har vi brugt den såkaldte *approximerede* eller *reducerede* kerne, som her betegnes K_{ap} , i *Hallén's* ligning. Modsat den eksakte kerne, som betegnes K_{ex} . I afsnit 2.3, så vi at den approksimerede kerne K_{ap} , er givet ved

$$K_{ap}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ik\sqrt{a^2+(x-y)^2}}}{\sqrt{a^2+(x-y)^2}}, \quad (7.1)$$

mens det den eksakte kerne $K_{ex}(x, y)$ er givet ved

$$K_{ex}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\pi \frac{e^{-ik\sqrt{4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (x-y)^2}}}{\sqrt{4a^2 \sin^2\left(\frac{\phi'}{2}\right) + (x-y)^2}} d\phi'. \quad (7.2)$$

Det viser sig imidlertid, at hvis den approksimerede kerne K_{ap} (7.1) erstattes af den eksakte kerne K_{ex} (7.2), så eksisterer der løsninger til henholdsvis *Hallén's* og *Pocklington's* integral-ligninger for den *lineære cylindriske dipol antenne*. I artiklerne [6] og [7], anvendes den eksakte kerne (7.2) i henholdsvis *Hallén's* og *Pocklington's* integralligninger. I det følgende gives et overblik over de vigtigste resultater fra disse artikler

- Både *Hallén's* og *Pocklington's* ligninger har unikke løsninger for den eksakte kerne.
- Det bevises at disse løsninger er velstillet - dvs. de afhænger kontinuert af data g , hvor g angiver højresiden i ligningerne.
- I [6] nævnes det, at hvis $g \in L^p(0, 1)$, så er løsningen u for henholdsvis *Hallén's* og *Pocklington's* ligninger kontinuert og afgrænset af randbetingelsen $u(0) = u(1) = 0$.
- I enderne af antennen opfylder løsningen $u(x) = O(\sqrt{x(1-x)})$ for $x \approx 0, 1$.
- Der implementeres forskellige diskretiseringsalgoritmer :
 - *Galerkin's* metode med forskellige vægt- og basisfunktioner.
 - *Collocation* (når den relative fejl $\geq 1\%$).
 - Forskellige adaptive metoder, som ikke bruger ækvivalent interpolation.
- I både [6] og [7] anerkendes problemerne med kraftige svingninger omkring centrum samt i enderne af antennen, når den approksimerede kerne benyttes.
- Det nævnes, at man ikke præcis er klar over, hvad "løsningen" for henholdsvis *Hallén's* og *Pocklington's* ligninger med den approksimerede kerne repræsenterer.

7.2 Konklusion

Dette projektet har vist, at man skal være påpasselig med at stole på de numeriske løsninger af henholdsvis *Hallén's* og *Pocklington's* integralligninger, når den approksimerede kerne anvendes. Vi har set, at der skal mange iterationer til for at det bliver klart, at løsningen er kraftigt svingende og dermed ubrugelig. I mange lærebøger vises numeriske løsninger af *Hallen's* og *Pocklington's* integralligninger. Disse løsninger er ofte bestemt med den approksimerede kerne, samt for et forholdsvis lille antal iterationer. Dermed ser løsningen ud til at være pæn og konvergent, men faktum er at det ikke er tilfældet, og at der ikke eksisterer en velstillet numerisk løsning. I langt hovedparten af den litteratur, som er studeret i dette projekt "glemmer" man at nævne problemerne omkring numerisk løsning af *Hallén's* og *Pocklington's* ligninger. Problematikken omkring de forskellige kernefunktioner nævnes typisk heller ikke.

Det er blevet vist, at *Hallén's* integralligning diskretiseret med henholdsvis *trapez metoden* og *produkt trapez metoden* ikke har en velstillet numerisk løsning. Det underliggende diskrete system er blevet analyseret vha. den *diskrete Picard betingelse*. Konklusionen er at årsagen til der ikke findes en velstillet numerisk løsning, er den anvendte beregningsmodel. Ved at bruge en anden beregningsmodel for den *lineære cylindriske dipol antenne*, kan man bestemme en velstillet konvergent løsning.

Litteratur

- [1] Collin & Zucker, *Antenna Theory I*, Chapter 8 "*Introduction to Linear Antennas*" by Tai Tsun Wu.
- [2] Constantine A. Balanis, *Antenna Theory Analysis and Design*, John Wiley & Sons, New York, 1997, ISBN: 0-471-59268-4.
- [3] Constantine A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, New York, 1989, ISBN: 0-471-62194-3
- [4] C.T.H. Baker, *The Numerical Treatment of Integral Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1977, ISBN: 0-19-853406-X.
- [5] Edmund Christiansen, *Numerisk Analyse*, Institut for Matematik og Datalogi, Odense Universitet, 1999.
- [6] Penny J. Davies, Dugald B. Duncan, Stefan A. Funken, *Accurate and efficient algorithms for frequency domain scattering from a thin wire*, Heriot-Watt Mathematics report HWM00-4.
- [7] George Fikioris, John Lionas, Christos G. Lioutas, *On the use of the Frill Generator in Integral Equations for Wire Antennas*.
- [8] E. Hallén, *Theoretical investigations into the transmitting and receiving qualities of antennae*, Nova Acta Regiae Soc. Sci. Upsaliensis, Ser. IV, No. 4 pp. 1-44, 1938.
- [9] E. Hallén, *Further Investigations into Iterated Sine- and Cosine- Integral and their Amplitude Functions with Reference to Antenna Theory*, Kungl. Tekniska Hogskolans Handlingar, Goteborg, 1955.
- [10] Hansen. P. C. *Numerical tools for analysis and solution of Fredholm integral equations of the first kind*, Inverse Problems 8 pp. 849-872, 1992.
- [11] Hansen. P. C. *Regularization Tools, A Matlab Package for Analysis and Solution of Discrete Ill-posed Problems*, June 1992 revision September 2001.

- [12] Hansen. P. C. *The discrete Picard condition for discrete ill-posed problems*, BIT 30, 1990, pp. 561-580.
- [13] G. Milton Wing, *A Primer on Integral Equations of the First Kind*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1991, ISBN: 0-89871-263-7.
- [14] Gene H. Golub, Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996, ISBN: 0- 8018-5413-X.
- [15] H.C. Pocklington, *Electrical Oscillations in Wire*, Cambridge Philos. Soc. Proc., Vol. 9, pp. 324-332, 1897.
- [16] Kendall E. Atkinson, Weimin Hann, *Theoretical Numerical Analysis - A Functional Analysis Framework*, Springer-Verlag, 2001, ISBN: 0-387-95142-3.
- [17] Kendall E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge University Press, 1997, ISBN: 0-521-58391-8.
- [18] Robert E. Collin, *Antennas and Radiowave Propagation*, McGraw-Hill Book Company, 1987, ISBN: 0-07-011808-6.
- [19] Sergey N. Makarov, *Antenna and EM Modelling with MATLAB*, John Wiley & Sons, 2002, ISBN: 0-471-21876-6.
- [20] Sophocles J. Orfanidis, *Electromagnetic Waves and Antennas*, The book is a work in progress, <http://www.ece.rutgers.edu/orfanidi/ewa/>
- [21] Harrington R. F. *Field Computation by Method of Moments*, Macmillan, Newyork, 1968.
- [22] Warren L. Stutzman, Gary A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, John Wiley & Sons, 1981, ISBN: 0-471-04458-X.
- [23] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, *Numerical Recipes in C++ The Art of Scientific Computing*, 2002, Cambridge University Press, ISBN: 0-521-75033-4.
- [24] Wolfram Stephen, *The Mathematica Book*, Cambridge University Press, 1999, ISBN: 0-521-64314-7.

Bilag A

Maxwell's ligninger

Eftersom teorien for antenner er nært beslægtet med *Maxwell's ligninger*, findes her en præsentation af Maxwell's ligninger.

A.1 Maxwell's ligninger på integralform

Maxwell's fire ligninger på såkaldt *integralform* er det absolutte fundament for elektromagnetismen.

A.1.1 Maxwell's 1. ligning på integralform

Gauss' lov for det elektriske felt er formuleret som

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = Q. \quad (\text{A.1})$$

Hvor \mathbf{D} angiver den elektriske fluxtæthed. I den forbindelse siges, at ladningen Q inden for en given lukket flade S er kilde for det elektriske felt. Hvis ladningen Q ikke er en punktladning, så kan den bestemmes ved at integrere over ladningstætheden ρ inden for den lukkede flade. Det vil sige, at

$$Q = \int_V \rho dV. \quad (\text{A.2})$$

Hvor ρ er ladningen indenfor volumenelementet dV , og V er det volumen, den betragtede gauss-flade omkranser. Sammenfattes de to udtryk for ladningen Q , fås *Maxwell's 1. ligning*

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \rho dV. \quad (\text{A.3})$$

A.1.2 Maxwell's 2. ligning på integralform

Omslutter en fald en positiv ladningsmængde, vil der fremkomme feltlinier ud af det omsluttede volumen. Dette er i kontrast til de magnetiske felter, hvor forholdene er mere simple. Eksperimenter viser, at der gennem en lukket flade altid vil gå lige mange magnetiske feltlinier ind gennem fladen, som der går ud af fladen. Konsekvensen heraf er, at der ikke findes *magnetiske*

monopoler - dvs. magneter, der kun har en pol. Hvilket netop er hvad *Maxwell's 2. ligning* udtrykker

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = 0. \quad (\text{A.4})$$

A.1.3 Maxwell's 3. ligning på integralform

Faraday's induktionslov er formuleret som

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad (\text{A.5})$$

hvor ε er den inducerede spænding, og Φ_m er den magnetiske flux gennem den givne kreds. Den inducerede spænding kan omskrives til

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{A.6})$$

hvor S er identisk med det af kurven C afgrænsede areal. Som følge heraf fås

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA \right) \quad (\text{A.7})$$

ombyttes integration og differentiation fås *Maxwell's 3. ligning*

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.8})$$

A.1.4 Maxwell's 4. ligning på integralform

Ampere's lov siger, at

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I, \quad (\text{A.9})$$

hvilket indirekte fastlægger den magnetiske feltstyrke \mathbf{H} fra en strøm I ved det pågældende linieintegral. Før vi begynder omskrivningen, ser vi på den analyse Maxwell udførte. Maxwell undersøgte på teoretisk basis den sammenhæng, som findes mellem det elektriske felt og magnetfeltet ved afladningen af en kondensator. I den forbindelse opdagede han en adsurditet ved *Ampere's lov*.

To plader i en kondensator oplades. Ved at lade en strøm løbe fra den ene plade til den anden kan kondensatoren aflades. Forestiller man sig at der indlægges en tilfældig plan kurve, som omkranser den ene tilledning, er strømmen I gennem denne flade S_1 givet ved

$$\left(\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \right)_{S_1} = I. \quad (\text{A.10})$$

Med rand i samme kurve kan vi imidlertid også indlægge en flade S_2 med form som en åben dåse, der ikke ikke skærer tilledningen men i stedet ligger mellem pladerne. Igennem denne flade er strømmen $I = 0$, mens kurveintegralet er uændret. Altså gælder der ifølge *Ampere's lov*, at

$$\left(\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} \right)_{S_2} = 0. \quad (\text{A.11})$$

Dette er i modstrid med det tidligere fundne resultat, hvilket ikke kan accepteres. Maxwell indså på basis heraf, at det var nødvendigt at modificere Amperes lov. Dette gjorde han ved at rette opmærksomheden mod kondensatormellemrummet. I dette mellemrum tillagde han det varierende elektriske felt en såkaldt forskydningsstrøm, som kaldes I_f . Det skal kraftigt understreges, at forskydningsstrømmen ikke er nogen transport af ladning. Fra *Maxwells 1. ligning* ved vi, at integralet over en lukket flade S bestemmer den omsluttede ladning Q . Altså

$$Q = \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.12})$$

Differentieres dette med hensyn til tiden finder vi, at strømmen I gennem fladen bliver

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.13})$$

Da dette udtryk også vil have mening i mellemrummet af en pladekondensator, kunne man fristes til at definere forskydningsstrømmen I_f gennem fladen S_2 ved

$$I_f = \oint_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.14})$$

Strømmen kan imidlertid også bestemmes fra den faktiske transport af ladning. Indføres strømtætheden \mathbf{J} på vektoriel form, som en vektor i strømmens retning og med en størrelse lig den sædvanlige strømtæthed ($\mathbf{J} = dI/dA$), så vil strømmen gennem fladen S_1 være bestemt ved

$$I = \int_{S_1} dI = \int_{S_1} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dA, \quad (\text{A.15})$$

hvor \mathbf{n} er en enhedsvektor vinkelret på dA . Maxwell foreslog på basis heraf, at Amperes sætning modificeres til

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{A.16})$$

hvor C er randkurven for fladen S . Såfremt fladen vælges lig S_1 , fås ikke noget bidrag fra det andet led i parentesens på højresiden men kun fra det første, og højresiden bliver lig med strømmen I . Dette er Amperes lov på normal form. Vælges integrationsfladen i stedet lig S_2 , vil det omvendt være det andet led på højresiden, som bidrager til integralet.

A.1.5 Maxwell's fire ligninger på integralform

Det vil på dette sted være passende at opskrive Maxwell's fire ligninger på integralform

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = \oint_V \rho dV \quad (\text{A.17})$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = 0 \quad (\text{A.18})$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dA \quad (\text{A.19})$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.20})$$

A.2 Maxwell's ligninger på differentialform

For at få det fulde udbytte af *Maxwell's* ligninger, bør man opskrive dem på differentialform. Denne form er også i bedre overensstemmelse med udledningerne i antenneteorien. Omskrivningen fra integralform til differentialform sker ved at benytte to vigtige resultater fra vektoranalysen - henholdsvis *Green's* og *Stokes* sætninger. Fra *Green's* sætning ved man, at et fladeintegral kan omformes til et volumenintegral ved

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV. \quad (\text{A.21})$$

Stokes sætning siger, at

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dA = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \quad (\text{A.22})$$

A.2.1 Maxwell's 1. ligning på differentialform

Vi har fra tidligere Maxwell's 1. ligning på integralform

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \rho dV. \quad (\text{A.23})$$

Anvendes *Green's* sætning på venstresiden af (A.23) fås

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{D} dV. \quad (\text{A.24})$$

Dvs. det gælder, at

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho. \quad (\text{A.25})$$

A.2.2 Maxwell's 2. ligning på differentialform

Vi har fra tidligere Maxwell's 2. ligning på integralform

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = 0. \quad (\text{A.26})$$

Anvendes *Green's* sætning på venstresiden af (A.26) fås

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV. \quad (\text{A.27})$$

Dvs. det gælder, at

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.28})$$

A.2.3 Maxwell's 3. ligning på differentialform

Vi har fra tidligere Maxwell's 3. ligning på integralform

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.29})$$

Anvendes Stokes sætning på venstresiden af (A.29) fås

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.30})$$

Sammenlignes højresiden i (A.29) med højresiden i (A.30) fås

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} dA = - \oint_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.31})$$

Dvs. det gælder, at

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (\text{A.32})$$

A.2.4 Maxwell's 4. ligning på differentialform

Vi har fra tidligere Maxwell's 4. ligning på integralform

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.33})$$

Anvendes Stokes sætning på venstresiden af (A.33) fås

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \oint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.34})$$

Sammenlignes højresiden i (A.33) med højresiden i (A.34) fås

$$\oint_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dA = \oint_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dA. \quad (\text{A.35})$$

Dvs. det gælder, at

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{A.36})$$

A.2.5 Maxwells fire ligninger på differential form

Det vil på dette sted være passende at opskrive Maxwell's fire ligninger på differentialform

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (\text{A.37})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{A.38})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{A.39})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (\text{A.40})$$

Maxwell's ligninger på differentialform er det naturlige udgangspunkt for al beskrivelse inden for elektromagnetiske felters egenskaber. Det gælder såvel lys og bølger samt forhold omkring antenner.

Bilag B

Vektor potentialet \mathbf{A} for en elektrisk strømkilde \mathbf{J}

Vektor potentialet \mathbf{A} er meget brugt i forbindelse med løsning af *elektromagnetiske* problemer, som opstår på baggrund af en given harmonisk elektrisk strøm \mathbf{J} . Den magnetiske flux \mathbf{B} er altid *solenoid* - dvs. den opfylder $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Det betyder, at den kan repræsenteres som *curl* af en anden vektor, fordi den opfylder vektor relationen

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0, \quad (\text{B.1})$$

hvor \mathbf{A} er en vilkårlig vektor. Pr. definition gælder det, at

$$\mathbf{B}_A = \mu \mathbf{H}_A = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{B.2})$$

eller

$$\boxed{\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}} \quad (\text{B.3})$$

hvor subscript A indikerer feltet hidrørende fra potentialet \mathbf{A} . Indsættet (B.3) i *Maxwell's curl ligning* fås

$$\nabla \times \mathbf{E}_A = -j\omega\mu\mathbf{H}_A, \quad (\text{B.4})$$

hvor $j = \sqrt{-1}$ angiver den imaginære enhed. (B.4) reduceres til

$$\nabla \times \mathbf{E}_A = -j\omega\mu\mathbf{H}_A = -j\omega\nabla \times \mathbf{A}, \quad (\text{B.5})$$

som igen kan omskrives til

$$\nabla \times [\mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A}] = 0. \quad (\text{B.6})$$

Fra vektorrelationen

$$\nabla \times (-\nabla\phi_e) = 0 \quad (\text{B.7})$$

og (B.6) fås

$$\mathbf{E}_A + j\omega\mathbf{A} = -\nabla\phi_e \quad (\text{B.8})$$

eller

$$\boxed{\mathbf{E}_A = -\nabla\phi_e - j\omega\mathbf{A}} \quad (\text{B.9})$$

Potentiale funktionen ϕ_e repræsenterer et vilkårligt elektrisk potentiale som funktion af en position.

Benyttes *curl* operatoren på begge sider af (B.2) samt vektorrelationen

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (\text{B.10})$$

fås at

$$\nabla \times (\mu \mathbf{H}_A) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (\text{B.11})$$

For et homogent medium, reduceres (B.11) til

$$\mu \nabla \times \mathbf{H}_A = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (\text{B.12})$$

Maxwell's 4. ligning kan skrives som

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{H}_A = \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E}_A} \quad (\text{B.13})$$

Benyttes (B.13) på ligning (B.12) fås

$$\mu \mathbf{J} + j\omega\mu\epsilon\mathbf{E}_A = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}. \quad (\text{B.14})$$

Substitueres (B.9) ind i (B.14) fås

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} &= -\mu \mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \nabla(j\omega\mu\epsilon\phi_e) \\ &= -\mu \mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\epsilon\phi_e), \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

hvor $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$

Ligning (B.2) definerer *curl* af \mathbf{A} . Nu kan *divergencen* af \mathbf{A} bestemmes

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = -j\omega\epsilon\mu\phi_e \Rightarrow \phi_e = -\frac{1}{j\omega\mu\epsilon}\nabla \cdot \mathbf{A}} \quad (\text{B.16})$$

Ligning (B.16) kaldes *Lorentz betingelsen*. Substitueres (B.16) ind i (B.15) fås

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}} \quad (\text{B.17})$$

Dermed reduceres (B.9) til

$$\boxed{\mathbf{E}_A = -\nabla\phi_e - j\omega\mathbf{A} = -j\omega\mathbf{A} - \frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})} \quad (\text{B.18})$$

Dvs. når \mathbf{A} er kendt, kan \mathbf{H}_A bestemmes ud fra (B.3) og \mathbf{E}_A kan bestemmes ud fra (B.18).

Bilag C

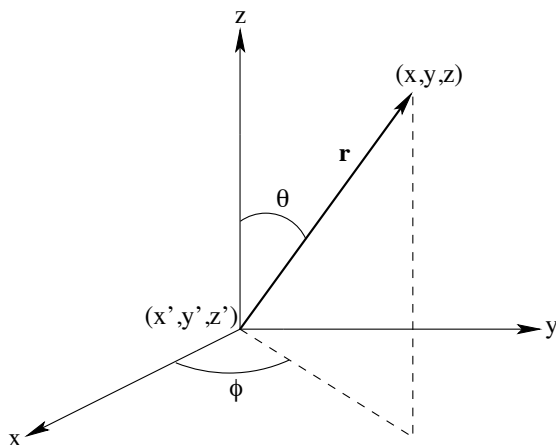
Løsning af den inhomogene vektor bølgeligning

Ønsker man at bestemme vektor potentialet \mathbf{A} ud fra strømtætheden \mathbf{J} , skal man løse den *inhomogene vektor bølgeligning* (B.17). Antag at en kilde med strømtæthed J_z er placeret i origo af et x, y, z koordinatsystem som vist i figur (C). Eftersom strømtætheden er rettet langs z -aksen (J_z), vil der kun eksistere en potential funktion, nemlig A_z . Det betyder, at (B.17) kan skrives som

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = -\mu J_z. \quad (\text{C.1})$$

I punkter væk fra kilden - dvs. når $J_z = 0$, reduceres bølgeligningen til

$$\nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0. \quad (\text{C.2})$$



Figur C.1: Koordinatsystem med kilde placeret i origo.

I et sfærisk koordinatsystem gælder det at $A_z = A_z(r)$, hvor r er radius. Det betyder at (C.2) kan skrives som

$$\nabla^2 A_z(r) + k^2 A_z(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial A_z(r)}{\partial r} \right] + k^2 A_z(r) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Evalueres (C.3) fås

$$\frac{d^2 A_z(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dA_z(r)}{dr} + k^2 A_z(r) = 0, \quad (\text{C.4})$$

hvor de partielle afledede er erstattet af traditionelle afledede, eftersom A_z kun er en funktion af radius r .

Differential ligningen (C.4) har to løsninger

$$A_{z_1} = C_1 \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad (\text{C.5})$$

$$A_{z_2} = C_2 \frac{e^{jkr}}{r}. \quad (\text{C.6})$$

Ligning (C.5) repræsenterer en udgående bølge og (C.6) angiver en indgående bølge. I dette problem betragtes tilfældet, hvor kilden er placeret i origo, således at det inducerede felt virker i en radial udgående retning. Derfor vælges løsningen fra (C.5). Dvs.

$$A_z = A_{z_1} = C_1 \frac{e^{-jkr}}{r}. \quad (\text{C.7})$$

I det statiske tilfælde - dvs. når $\omega = 0$ og $k = 0$ reduceres (C.7) til

$$A_z = \frac{C_1}{r} \quad (\text{C.8})$$

som er løsning til bølgeligningerne (C.2), (C.3) og (C.4), når $k = 0$. Det betyder at i punkter væk fra kilden, er den eneste forskel på den tidsafhængige løsning og den statiske løsning en faktor e^{-jkr} .

I tilfældet, hvor kilden $J_z = 0$ og $k = 0$ reduceres bølgeligningen (C.1) til

$$\nabla^2 A_z = \mu J_z \quad (\text{C.9})$$

Ligning (C.9) kendes som *Poisson's* ligning, hvis løsning er veldokumenteret. Næmlig

$$A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int \int \int_V \frac{J_z}{r} dv'. \quad (\text{C.10})$$

Ligning (C.10) angiver løsningen til (C.1) for det statiske tilfælde - dvs. når $k = 0$. Den tidsafhængige løsning findes ved at multiplicere højresiden af (C.10) med e^{-jkr} , dermed fås

$$\boxed{A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int \int \int_V J_z \frac{e^{-jkr}}{r} dv'} \quad (\text{C.11})$$

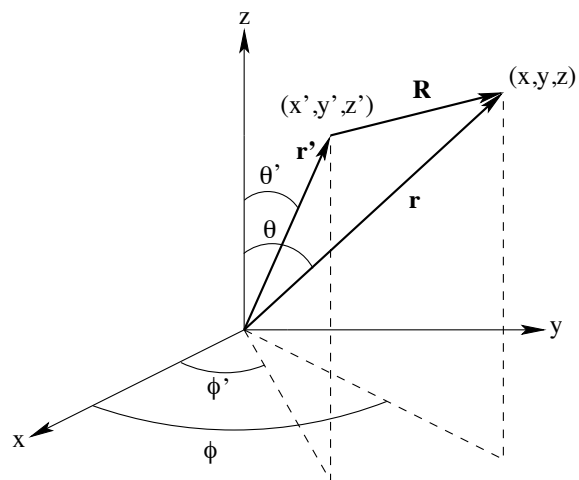
som er løsning til (C.1).

Hvis kilden imidlertid fjernes fra origo og flyttes til et vilkårligt punkt i rummet, givet ved koordinaterne (x', y', z') , som vist i figur C fås

$$\boxed{\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int \int \int_V \mathbf{J}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dv'} \quad (\text{C.12})$$

hvor koordinaterne (x', y', z') angiver positionen af kilden, (x, y, z) angiver observationspunktet og R angiver afstanden mellem kilden og observationspunktet. Hvis \mathbf{J} i (C.12) er lineær, reduceres volumenintegralet til et overfladeintegral. Dvs.

$$\boxed{\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int \int_S \mathbf{J}_s(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} ds'} \quad (\text{C.13})$$



Figur C.2: Koordinatsystem med kilde placeret i rummet

For en elektrisk strøm I_e langs en ledende cylindrisk wire, reduceres overfladeintegralet til et kurveintegral. Dvs.

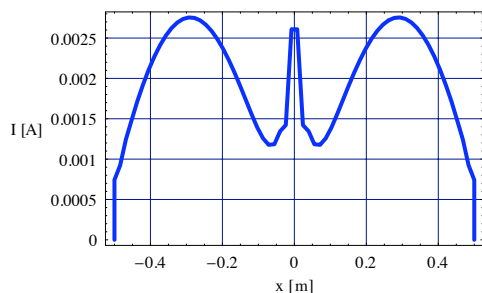
$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_C \mathbf{I}_e(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dl' \quad (\text{C.14})$$

Bilag D

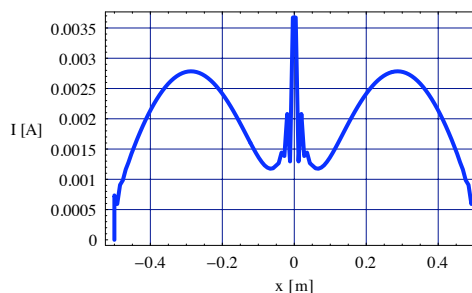
Moment metoden anvendt på *Pocklington's* ligning

Den primære fokus i dette projekt er, at bestemme numeriske løsninger til *Hallén's* integralligning. Derved fås strømmen i dipol antennen. En alternativ måde at bestemme denne strøm på, er ved at løse ¹*Pocklington's* integralligning for den samme antenne.

Her præsenteres resultaterne af den såkaldte ²*moment metode*, anvendt på *Pocklington's* ligning. Det skal for en ordens skyld nævnes, at *Moment metoden* svarer til *Galerkin's metode*, hvis vægt funktionerne og basis funktionerne vælges ens.



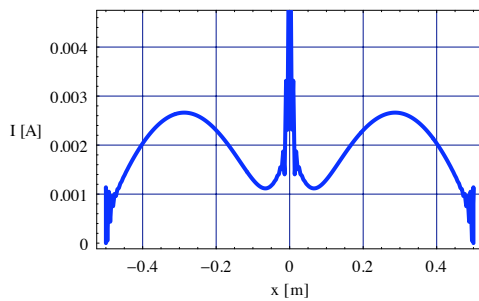
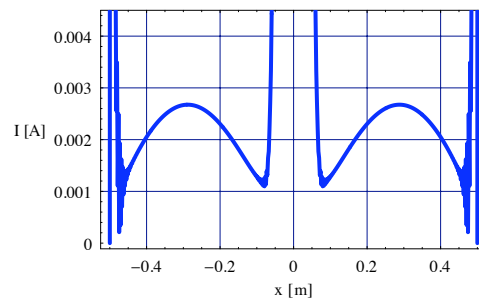
Figur D.1: *Moment metoden* for $n = 64$.



Figur D.2: *Moment metoden* for $n = 128$.

¹Løsning af *Pocklington's* integralligning med *Moment metoden* findes i filen "pocklington.nb". Se bilag E for indhold af CD.

²Kaldt *Method of Moments* på eng. Se [21] for en gennemgang af metoden.

Figur D.3: *Moment metoden* for $n = 256$.Figur D.4: *Moment metoden* for $n = 512$.

Som det fremgår af figurerne D.3 - D.4, opstår der, ligesom for *Hallén's* ligning, svingninger omkring centrum af antennen (nær $x = 0$) samt i enderne af antennen (nær $x = -L/2$ og $x = L/2$). Her er det igen svingningerne i enderne der er kritiske. Forstået på den måde, at det er disse svingninger, som gør at der heller ikke eksisterer en integrabel løsning for *Pocklington's* integralligning med den *approximerede* kerne. Som det var tilfældet for *Hallén's* ligning, er det diskrete system, som fås ved diskretisering af *Pocklington's* ligning med *Moment metoden*, ill-posed.

Tabel D.1 viser størrelsen af konditionstallet for koefficientmatricen efterhånden som antallet af iterationer øges. Specielt interessant er den kraftige forøgelse af konditionstallet, som finder sted mellem 256 og 512 iteration. Dette vidner om, at det diskrete system for *Pocklington's* ligning er ill-posed.

n	$\kappa(A)$
4	12.0504
8	30.3012
16	69.2759
32	137.589
64	73.5129
128	120.185
256	365.888
512	290824

Tabel D.1: Iterationstabel for *Moment metoden* anvendt på *Pocklington's* ligning.

Der er ikke foretaget tests for 1024 iteration. Dette skyldes at beregningstiden er meget større for *Pocklington's* ligning end for *Hallén's* ligning. Det kan oplyses at beregningstiden for løsning af *Pocklington's* ligning med 512 diskretiseringspunkter med *Moment metoden*, er omkring 27 minutter. Til sammenligning er beregningstiden for løsning af *Hallén's* ligning med *produkt trapez metoden*, og det samme antal diskretiseringspunkter, omkring 2 minutter. Begge tests er udført på et system med 1024 MB DDR-ram samt en 2.4 Ghz, Pentium 4 processor.

Bilag E

CD

CD'en som følger med denne rapport indeholder følgende:

/Mathematica/Quadrature/Packages/	Pakker til numerisk kvadratur
/Mathematica/Visualization/	Visualisering af funktioner i <i>Hallén's</i> integralligning
/Mathematica/Hallen/Trapez/	Løsning af <i>Hallén's</i> integralligning med <i>trapez metoden</i>
/Mathematica/Hallen/ProductTrapez/	Løsning af <i>Hallén's</i> integralligning med <i>produkt trapez metoden</i>
/Mathematica/Pocklington/MoM/	Løsning af <i>Pocklington's</i> integralligning med <i>Method of Moments</i>
/Matlab/Hallen/Trapez/	Løsning af <i>Hallén's</i> integralligning med <i>trapez metoden</i>
/Matlab/Hallen/ProductTrapez/	Løsning af <i>Hallén's</i> integralligning med <i>produkt trapez metoden</i>
/Rapport/	Rapport i PostScript format

Tabel E.1: Indhold af CD

Med hensyn til kildekoden i henholdsvis *Mathematica* og *Matlab*, bør filerne kopieres til harddisk'en eftersom der kræves skriveadgang for at kunne eksekvere koden. Ved kopiering af filerne er det vigtigt, at bibliotekerne IKKE er read-only (read-only er foretrukket på nogle Windows platforme).